为$\begin{cases}a_1\cdot\dfrac{x-1}{3}+b_1\cdot\dfrac{y+1}{2}=c_1,\\a_2\cdot\dfrac{x-1}{3}+b_2\cdot\dfrac{y+1}{2}=c_2.\end{cases}$ ∵ 方程组$\begin{cases}a_1x+b_1y=c_1,\\a_2x+b_2y=c_2\end{cases}$的解为$\begin{cases}x=4,\\y=3,\end{cases}$ ∴ $\begin{cases}\dfrac{x-1}{3}=4,\\\dfrac{y+1}{2}=3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=13,\\y=5.\end{cases}$ 故答案为$\begin{cases}x=13,\\y=5.\end{cases}$

10.【解】(1)$x^2+x-3=0$,二次项系数 $a=1$,一次项系数 $b=1$,常数项 $c=-3$,则 $\Delta=b^2-4ac=1^2-4\times1\times(-3)=13>0$,∴ $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$,∴ $x_1=\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$,$x_2=\dfrac{-1-\sqrt{13}}{2}$.

(2)解不等式①得,$x\leqslant2$,解不等式②得,$x>-2$,∴ 不等式组的解集为$-2<x\leqslant2$,则不等式组的整数解为$-1,0,1,2$.

11.【解】(1)设每本甲种课外书的价格为 x 元,则每本乙种课外书的价格为$\left(1+\dfrac{1}{2}\right)x=1.5x$(元).根据题意得$\dfrac{480}{x}-\dfrac{600}{1.5x}=4$,解得 $x=20$,经检验,$x=20$ 是分式方程的解且符合题意.

答:每本甲种课外书的价格为 20 元.

(2)设购进 y 本乙种课外书,则购进$(50-y)$本甲种课外书.根据题意得 $20(50-y)+20\times1.5y\leqslant1\ 300$,

解得 $y\leqslant30$. 答:该校最多可以购进 30 本乙种课外书.

12.【解】(1)设每张电影票的原定零售票价为 x 元. 根据题意可得,$\dfrac{5\ 000}{x}=\dfrac{3\ 200}{x-18}$,

解得 $x=50$,经检验,$x=50$ 是原方程的根且符合题意.

答:每张电影票的原定零售票价为 50 元.

(2)设平均每次降价的百分率为 m. 由题意得 $50(1-m)^2=40.5$,

解得 $m_1=0.1=10\%$,$m_2=1.9$(不合题意,舍去),即平均每次降价的百分率为 10%.

13.【解】(1)设购进 1 台甲种农机和 1 台乙种农机各需 x 万元和 y 万元. 由题意,得

$\begin{cases}x+y=2,\\2x+3y=5.5,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=0.5,\\y=1.5.\end{cases}$

答:购进 1 台甲种农机和 1 台乙种农机各需 0.5 万元和 1.5 万元.

(2)设购进甲种农机 m 台,则购进乙种农机$(10-m)$台. 由题意,得 $9.5\leqslant0.5m+1.5(10-m)\leqslant12$,解得 $3\leqslant m\leqslant5.5$.

∵ m 为整数,∴ m 取 3,4,5,

∴ $10-m$ 对应取 7,6,5,∴ 共有 3 种购买方案. 方案一:购进甲种农机 3 台,乙种农机 7 台;方案二:购进甲种农机 4 台,乙种农机 6 台;方案三:购进甲种农机 5 台,乙种农机 5 台.

第三章　函数

A 湖南真题诊断练

刷 诊断

1. B 【解析】∵ 将点 $P(-3,2)$ 向右平移 3 个单位长度到 P_1 处,∴ 横坐标需加 3,即$-3+3=0$,纵坐标 2 保持不变,∴ 平移后的点 P_1 的坐标为(0,2). 故选 B.

2. D 【解析】A 选项,当 $x=2$ 时,$y=1$,所以点(2,2)不在函数 $y=\dfrac{2}{x}$ 的图象上,故本选项不符合题意;B 选项,由 $y=\dfrac{2}{x}$ 可知 $2>0$,所以它的图象位于第一、第三象限,故本选项不符合题意;C 选项,当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小,故本选项不符合题意;D 选项,当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小,故本选项符合题意. 故选 D.

3. A 【解析】A 选项,当 $x=0$ 时,$y=-1$,则它的图象与 y 轴交于点$(0,-1)$,故本选项符合题意;B 选项,∵ $2>0$,∴ y 随 x 的增大而增大,故本选项不符合题意;C 选项,当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时,$y>0$,故本选项不符合题意;D 选项,它的图象经过第一、三、四象限,故本选项不符合题意. 故选 A.

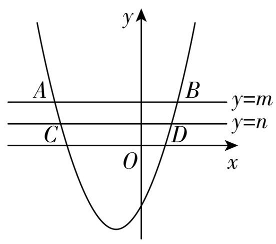
4. D 【解析】∵ 反比例函数 $y=\dfrac{k}{x}(k>0)$ 的图象过点(1,3),∴ $k=1\times3=3$,∴ $y=\dfrac{3}{x}$. 设直线 AB 的表达式为 $y=mx+n$,∴ $\begin{cases}3=m+n,\\0=-m+n,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}m=\dfrac{3}{2},\\n=\dfrac{3}{2},\end{cases}$ ∴ 直线 AB 的表达式为 $y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2}$. 联立$\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{3}{2},\\y=\dfrac{3}{x},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=1,\\y=3\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-2,\\y=-\dfrac{3}{2},\end{cases}$ ∴ $B\left(-2,-\dfrac{3}{2}\right)$. 设 $C(c,0)$. ∵ $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times|c+1|\times\left(3+\dfrac{3}{2}\right)=9$,解得 $c=3$ 或 $c=-5$,∴ 点 C 的坐标为(3,0)或(−5,0),故选 D.

5. C 【解析】∵ 点 $P(2a-4,a+3)$ 在第二象限,∴ $\begin{cases}2a-4<0,\\a+3>0,\end{cases}$ ∴ $-3<a<2$,故选项 A 错误. 若点 $P(2a-4,a+3)$ 为"整点",$-3<a<2$,则整数 a 为$-2,-1,0,1$,∴ "整点" P 为$(-8,1)$,$(-6,2)$,$(-4,3)$,$(-2,4)$,∴ 点 P 的个数为 4 个,故选项 B 错误. ∵ $\dfrac{1}{-8}=-\dfrac{1}{8}$,$\dfrac{2}{-6}=-\dfrac{1}{3}$,$\dfrac{3}{-4}=-\dfrac{3}{4}$,$\dfrac{4}{-2}=-2$,∴ 若 P 为"超整点",则点 P 的个数为 1 个,故选项 C 正确. ∵ "超整点" P

的坐标为$(-2,4)$,∴ 点P到两坐标轴的距离之和为$2+4=6$,$6<10$,故选项 D 错误. 故选 C.

6. C 【解析】∵ 直线l为二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$的图象的对称轴,∴ 直线$x=-\dfrac{b}{2a}>0$,∴ 当$a<0$时,$b>0$,当$a>0$时,$b<0$,即a,b异号,故选 C.

7. B 【解析】如图所示,设直线$y=m$与抛物线$y=x^2+2x-3$交于A,B两点,直线$y=n$与抛物线$y=x^2+2x-3$交于C,D两点. ∵ $m>n>0$,关于x的方程$x^2+2x-3-m=0$的解为x_1,$x_2(x_1<x_2)$,关于x的方程$x^2+2x-3-n=0$的解为$x_3,x_4(x_3<x_4)$,∴ x_1,x_2,x_3,x_4分别是点A,B,C,D的横坐标,∴ $x_1<x_3<x_4<x_2$,故选 B.



8. 180　【解析】把$l=0.9$,$f=200$代入$f=\dfrac{k}{l}(k$为常数,$k\neq0)$,得$200=\dfrac{k}{0.9}$,解得$k=180$,故答案为 180.

9. 甲　【解析】根据图象可得甲到达终点用时 12 秒,乙到达终点用时 14 秒,∴ 甲先到达终点,故答案为甲.

10. 【解】(1)该花店在这 10 天中出现该种花作废处理情形的有$1+1+2=4$(天).

答:花店在这 10 天中出现该种花作废处理情形的天数为 4 天.

(2)①当$n=14$时,$y=10n-80=10\times14-80=60$,

∴ 当$n=14$时,该花店这天的利润为 60 元.

②∵ $70<80$,∴ $n<16$. 令$y=70$,得$70=10n-80$,解得$n=15$.

由表可知,日需求量为 15 支花的共有 2 天,∴ 该花店这 10 天中日利润为 70 元的日需求量的频率为$\dfrac{2}{10}=\dfrac{1}{5}$.

答:该花店这 10 天中日利润为 70 元的日需求量的频率为$\dfrac{1}{5}$.

11. 【解】(1)∵ $CD=AB=12$ m,

∴ 篱笆墙的宽为$AD=GH=BC=(21-12)\div3=3$ (m).

设CG长为a m,则DG长为$(12-a)$m.

根据题意,得$AD\times DC-AE\times AH=32$,

∴ $3\times12-1\times(12-a)=32$,解得$a=8$,

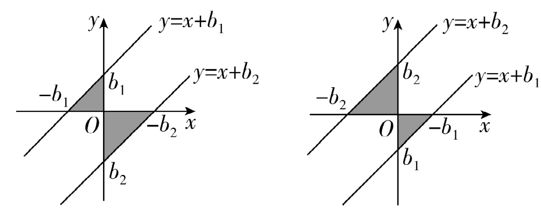
∴ $CG=8$ m,$DG=4$ m.

(2)设两块矩形总种植面积为y m²,BC长为x m,则$AD=HG=BC=x$ m,$DC=(21-3x)$m. 由题意得,两块矩形总种植面积为$BC\times DC$,即$y=x\cdot(21-3x)$,∴ $y=-3x^2+21x=-3\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+\dfrac{147}{4}$. ∵ $0<21-3x\leqslant12$,∴ $3\leqslant x<7$,∴ 当$x=\dfrac{7}{2}$时,y有最大值,最大值为$\dfrac{147}{4}$.

故BC应设计为$\dfrac{7}{2}$ m,此时围成的两块矩形总种植面积最大,最大面积为$\dfrac{147}{4}$ m².

12. 【解】(1)①(√)　②(√)　③(×)

(2)由题意可得$x_2=-y_1$,$y_2=-x_1$,点(x_1,y_1)与点$(-y_1,-x_1)(x_1\neq-y_1)$是一对"对偶点". ∵ $y=k_1x+b_1$是"对偶函数",∴ 其图象上必存在一对"对偶点",∴ $\begin{cases}y_1=k_1x_1+b_1,\\-x_1=-k_1y_1+b_1,\end{cases}$两式相减可得$k_1=1$. 同理可得$k_2=1$,∴ 关于$x$的两个一次函数分别为$y=x+b_1$,$y=x+b_2$. 由于$b_1,b_2$都是常数,且$b_1\cdot b_2<0$,故这两个一次函数的图象分别与两坐标轴围成的平面图形是有公共直角顶点,且分别位于第二、四象限的两个等腰直角三角形,如图(1),图(2)所示:



图(1)　　图(2)

∴ 其面积之和为$\dfrac{1}{2}(b_1^2+b_2^2)$.

(3)由题意可得$a\neq0$. 同(2)可得$\begin{cases}y_1=2ax_1^2-1,\\-x_1=2a(-y_1)^2-1,\end{cases}$两式相减整理得$x_1-y_1=\dfrac{1}{2a}$,∴ $y_1=x_1-\dfrac{1}{2a}$,代入$y_1=2ax_1^2-1$整理可得$2ax_1^2-x_1+\dfrac{1}{2a}-1=0$,此关于$x_1$的一元二次方程必有实数根,∴ $\Delta\geqslant0$. 由于$\Delta=1-8a\left(\dfrac{1}{2a}-1\right)=-3+8a=0$时,$x_1=-y_1=\dfrac{2}{3}$(不符合题意),∴ 必有$\Delta=-3+8a>0$,解得$a>\dfrac{3}{8}$.

13. (1)【解】将$A(2,2)$代入$y=ax(x-4)$,得$2=2a(2-4)$,解得$a=-\dfrac{1}{2}$,∴ $y=-\dfrac{1}{2}x(x-4)=-\dfrac{1}{2}x^2+2x$.

(2)【证明】设直线OA的表达式为$y=kx$,将$A(2,2)$代入$y=kx$,得$2=2k$,∴ $k=1$,∴ 直线OA的表达式为$y=x$.

∵ 点$P(x_1,y_1)$在二次函数图象上,$PB/\!/y$轴交线段OA于点B,∴ $P\left(x_1,-\dfrac{1}{2}x_1^2+2x_1\right)$,$B(x_1,x_1)$,∴ $PB=\left(-\dfrac{1}{2}x_1^2+2x_1\right)-x_1=-\dfrac{1}{2}x_1^2+x_1$.

选择①：易得 $Q\left(x_2,-\frac{1}{2}x_2^2+2x_2\right)$，$C(x_2,x_2)$，$\therefore QC=-\frac{1}{2}x_2^2+x_2$.

当 $PB>QC$，即 $-\frac{1}{2}x_1^2+x_1>-\frac{1}{2}x_2^2+x_2$ 时，$(x_1-x_2)(x_1+x_2-2)<0$.

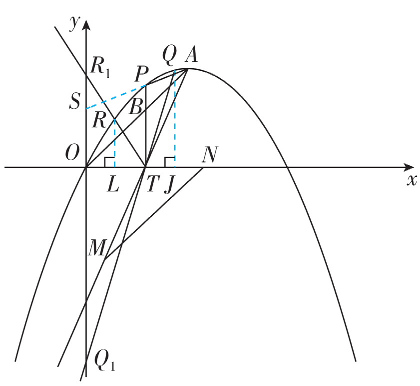
$\because x_1<x_2$，$\therefore x_1-x_2<0$，$\therefore x_1+x_2-2>0$，即 $x_1+x_2>2$.

选择②：易得 $R\left(x_3,-\frac{1}{2}x_3^2+2x_3\right)$，$D(x_3,x_3)$，$\therefore RD=-\frac{1}{2}x_3^2+x_3$.

当 $PB>RD$，即 $-\frac{1}{2}x_1^2+x_1>-\frac{1}{2}x_3^2+x_3$ 时，$(x_1-x_3)(x_1+x_3-2)<0$.

$\because x_1>x_3$，$\therefore x_1-x_3>0$，$\therefore x_1+x_3-2<0$，即 $x_1+x_3<2$.（任选一个命题证明即可）

(3)【解】如图，延长 AP 交 y 轴于点 S，过点 R，Q 分别作 x 轴的垂线，垂足分别为 L，J.



$\because RL/\!/R_1O$，$QJ/\!/OQ_1$，$\therefore \triangle TRL\backsim\triangle TR_1O$，$\triangle QTJ\backsim\triangle Q_1TO$.

又$\because x_2=\frac{3}{2}x_1$，$x_3=\frac{1}{2}x_1$，$\therefore \frac{R_1O}{RL}=\frac{OT}{TL}=\frac{x_1}{x_1-x_3}=\frac{x_1}{x_1-\frac{1}{2}x_1}=2$，$\frac{OQ_1}{JQ}=\frac{TO}{TJ}=\frac{x_1}{x_2-x_1}=\frac{x_1}{\frac{3}{2}x_1-x_1}=2$，$\therefore OR_1=2RL$，$OQ_1=2QJ$，

$\therefore R_1Q_1=OR_1+OQ_1=2RL+2QJ=2\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x_1\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}x_1\right]+2\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}x_1\right)^2+2\cdot\frac{3}{2}x_1\right]=-\frac{5}{2}x_1^2+8x_1$.

设直线 AP 的表达式为 $y=k_1x+b_1$，将 $A(2,2)$，$P\left(x_1,-\frac{1}{2}x_1^2+2x_1\right)$ 代入上式，得 $\begin{cases}-\frac{1}{2}x_1^2+2x_1=k_1x_1+b_1,\\2=2k_1+b_1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-\frac{x_1}{2}+1,\\b_1=x_1,\end{cases}$ $\therefore$ 直线 AP 的表达式为 $y=\left(-\frac{1}{2}x_1+1\right)x+x_1$，

当 $x=0$ 时，$y=x_1$，即 $OS=x_1$.

又$\because OT=x_1$，$\therefore OT=OS$. $\because$ 直线 OA 的表达式为 $y=x$，

$\therefore \angle SOA=\angle TOA=45°$.

又$\because OA=OA$，$\therefore \triangle OAT\cong\triangle OAS(\text{SAS})$，$\therefore \angle SAO=\angle TAO$，即 $\angle PAO=\angle TAO$.

又$\because \angle AMN=\angle PAO$，$\therefore \angle OAT=\angle AMN$.

$\because A(2,2)$，$\therefore OA=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$. $\because MN=2\sqrt{2}$，$\therefore AO=MN$.

又$\because \angle OTA=\angle NTM$，$\therefore \triangle ATO\cong\triangle MTN(\text{AAS})$，$\therefore OT=TN=x_1$，$\therefore ON=2OT=2x_1$，

$\therefore t=R_1Q_1-ON=-\frac{5}{2}x_1^2+8x_1-2x_1=-\frac{5}{2}\left(x_1-\frac{6}{5}\right)^2+\frac{18}{5}$，

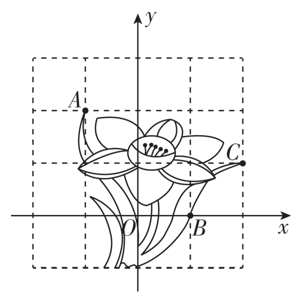
$\therefore$ 当 $x_1=\frac{6}{5}$ 时，t 有最大值，为 $\frac{18}{5}$.

B 考点突破练

考点 10　函数及其图象

刷基础

1. A　【解析】根据点 A 的坐标为 $(-1,2)$，点 C 的坐标为 $(2,1)$，建立平面直角坐标系如图.



则 $B(1,0)$，故选 A.

2. $(-2,-5)$　【解析】$\because$ 点 $P(m,n)$ 到 x 轴的距离为 5，到 y 轴的距离为 2，$\therefore m=\pm2$，$n=\pm5$. $\because$ 点 $P(m,n)$ 在第三象限内，$\therefore m=-2$，$n=-5$，$\therefore$ 点 P 坐标为 $(-2,-5)$. 故答案为 $(-2,-5)$.

3. C　【解析】$\because$ 等腰三角形的周长为 20 cm，底边长为 y cm，一腰长为 x cm，$\therefore 2x+y=20$，$\therefore y=20-2x$. $\because$ 两边之和大于第三边，$\therefore \begin{cases}2x>20-2x,\\x+20-2x>x,\end{cases}$ 解得 $5<x<10$. 故选 C.

4. $x\geqslant-1$ **且** $x\neq1$　【解析】由题意得 $x+1\geqslant0$ 且 $x-1\neq0$，解得 $x\geqslant-1$ 且 $x\neq1$，$\therefore$ 自变量 x 的取值范围是 $x\geqslant-1$ 且 $x\neq1$. 故答案为 $x\geqslant-1$ 且 $x\neq1$.

5. C　【解析】根据题图可知，底层圆柱的直径较小，上层圆柱的直径较大，中层圆柱的直径最大，所以注水过程中，容器内底部所受水的压强的增大是先快后慢再变快，但最后一段比第一段慢，故选项 C 符合题意. 故选 C.

6. A　【解析】乙用 $18-3=15$(分)追上了甲，则乙每分钟比甲多走 $150\div15=10$(米)，$\therefore$ ①正确，符合题意，②不正确，不符合题意.

第一部分　考点过关
第二部分　题型突破
第三部分　中考新趋势
狂K重点

甲的速度为 $150\div3=50$(米/分),则甲到达 B 地所用时间为 $1\ 200\div50=24$(分),乙的速度为 $50+10=60$(米/分),则乙到达 B 地所用时间为 $1\ 200\div60=20$(分),

∴ 当 $x=20+3=23$ 时乙到达 B 地,∴ 乙比甲早 $24-23=1$(分)到达终点 B 地,∴ ③正确,符合题意. 由题意可知,点 Q 表示乙到达终点,则点 Q 的横坐标为 23,甲出发 23 分钟后距 A 地 $50\times23=1\ 150$(米),则当 $x=23$ 时,甲、乙两人之间的距离为 $1\ 200-1\ 150=50$(米),∴ 点 Q 的坐标为$(23,50)$,∴ ④不正确,不符合题意. 综上,①③正确. 故选 A.

刷易错

7. C 【解析】对于 C 选项中的曲线,在自变量 x 的取值范围内,作一条垂直于 x 轴的直线,与曲线有且只有一个交点,所以能表示 y 是 x 的函数;而 A、B、D 三个选项中的曲线,在自变量 x 的取值范围内,作一条垂直于 x 轴的直线,与曲线不止有一个交点,所以不能表示 y 是 x 的函数. 故选 C.

易错警示

函数的概念

对于自变量取值范围内的每一个值,都有唯一的函数值与它对应.

刷提升

1. C 【解析】∵ $y=[x]$,$[x]$表示不超过 x 的最大整数,∴ 当 $y=2$ 时,x 的取值范围为 $2\leqslant x<3$,故选 C.

2. D 【解析】由题图(2)可知,$x=0$ 时,$y=6$,则 $AD=6$. 点 M 从点 A 沿 AB 向点 B 运动的过程中,DM 的长是不断增加的,而点 M 从点 B 沿 $BC\to CD$ 向点 D 运动的过程中,DM 的长是不断减小的,∴ 当点 M 运动到 B 点时,$x=m$,即 $AB=m$,此时 $y=m+2$,即 $DM=DB=m+2$. 在 Rt△ABD 中,$\angle A=90°$,由勾股定理,得$(m+2)^2=6^2+m^2$,解得 $m=8$,∴ $AB=8=CD$. 当 M 为 BC 的中点时,$BM=\frac{1}{2}BC=\frac{1}{2}AD=3$,∴ △$DBM$ 的面积为 $\frac{1}{2}\cdot BM\cdot CD=\frac{1}{2}\times3\times8=12$,故选 D.

3. 11.5 【解析】设 AB 所在直线的函数表达式为 $F=kh+b(k\neq0)$,把 $A(6,20)$,$B(12,8)$代入 $F=kh+b(k\neq0)$中得 $\begin{cases}6k+b=20,\\12k+b=8,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=-2,\\b=32,\end{cases}$ ∴ AB 所在直线的函数表达式为 $F=-2h+32$. 把 $F=15$ 代入 $F=-2h+32$ 得,$15=-2h+32$,解得 $h=8.5$,$20-8.5=11.5$(cm).

刷素养

4.【解】【应用】(1)AB 的长度为$|-1-2|=3$,故答案为 3.

(2)由 $CD/\!/y$ 轴,$C(1,0)$,可设点 D 的坐标为$(1,m)$. ∵ $CD=2$,∴ $|0-m|=2$,解得 $m=\pm2$,∴ 点 D 的坐标为$(1,2)$或$(1,-2)$. 故答案为$(1,2)$或$(1,-2)$.

【拓展】(1)$d(E,F)=|2-(-1)|+|0-(-2)|=5$. 故答案为 5.

(2)∵ $E(2,0)$,$H(1,t)$,$d(E,H)=3$,∴ $|2-1|+|0-t|=3$,解得 $t=\pm2$. 故答案为±2.

(3)由点 Q 在 x 轴上,可设点 Q 的坐标为$(x,0)$. ∵ 三角形 OPQ 的面积为 3,$P(3,3)$,∴ $\frac{1}{2}|x|\times3=3$,解得 $x=\pm2$,∴ 点 Q 的坐标为$(2,0)$或$(-2,0)$. 当点 Q 的坐标为$(2,0)$时,$d(P,Q)=|3-2|+|3-0|=4$;当点 Q 的坐标为$(-2,0)$时,$d(P,Q)=|3-(-2)|+|3-0|=8$. 综上,$d(P,Q)=4$ 或 8.

考点 11　一次函数

刷基础

1. A 【解析】把 $P(2,m+1)$代入 $y=2x-1$,可得 $m+1=2\times2-1$,解得 $m=2$,故选 A.

2. D 【解析】∵ 一次函数 $y=kx+b$ 的图象经过第一、二、四象限,∴ $k<0$,$b>0$. 故选 D.

3. C 【解析】A 选项,$k=2\ 025>0$,∴ y 的值随着 x 值的增大而增大,故本选项不符合题意;B 选项,当 $x=0$ 时,$y=-2\ 026$,∴ 函数图象与 y 轴的交点坐标为$(0,-2\ 026)$,故本选项不符合题意;C 选项,当 $x=0$ 时,$y=-2\ 026$,且 $k=2\ 025>0$,∴ 当 $x<0$ 时,$y<-2\ 026$,故本选项符合题意;D 选项,$k=2\ 025>0$,$b=-2\ 026<0$,∴ 函数图象经过第一、三、四象限,故本选项不符合题意. 故选 C.

4. < 【解析】∵ $y=2x$ 中,$k=2>0$,∴ y 随 x 增大而增大. 又∵ $-1<2$,∴ $y_1<y_2$. 故答案为<.

5. 减小 【解析】∵ 一次函数 $y=kx+3$(k 是常数,$k\neq0$)的图象经过点$(3,0)$,∴ $3k+3=0$,解得 $k=-1$,∴ y 的值随 x 的增大而减小,故答案为减小.

6. $y=4x+9$ 【解析】将一次函数 $y=4x-5$ 的图象向上平移 6 个单位,再向左平移 2 个单位,得到的新图象的函数表达式为 $y=4(x+2)-5+6=4(x+2)+1=4x+9$. 故答案为 $y=4x+9$.

关键点拨

一次函数图象的平移规律

一次函数的图象平移后 k 不变,b 的变化为平移的距离,向上平移 b 增加,向下平移 b 减小.

7.【解】在矩形 $ABDC$ 中,点 A,C 的坐标分别为$(1,1)$,$(-3,1)$,∴ $B(1,0)$. 设直线 OA 的表达式为 $y=kx$,把 $A(1,1)$代入,可得 $k=1$,∴ 直线 OA 的表达式为 $y=x$.

设直线 BC 的表达式为 $y=mx+n$,

把点 $B(1,0)$,$C(-3,1)$代入得 $\begin{cases}m+n=0,\\-3m+n=1,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=-\frac{1}{4},\\n=\frac{1}{4},\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC 的表达式为 $y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$.

8. B 【解析】由题意知，不等式 $ax+b>0$ 的解集为一次函数 $y=ax+b(a\neq0)$ 的图象在 x 轴上方部分所对应的 x 的取值范围. 由图象可知，不等式 $ax+b>0$ 的解集为 $x<3$，故选 B.

9. $x=-2$ 【解析】$\because OA=2$，$\therefore A(-2,0)$. $\because$ 一次函数 $y=kx+b$ 的图象与 x 轴交于点 $A(-2,0)$，$\therefore$ 当 $y=0$ 时，$x=-2$，即 $kx+b=0$ 时，$x=-2$，$\therefore$ 关于 x 的方程 $kx+b=0$ 的解是 $x=-2$. 故答案为 $x=-2$.

刷 易错

10. 4 或 -4 【解析】令 $x=0$，则 $y=b$，令 $y=0$，则 $x=-\frac{b}{2}$，$\therefore$ 一次函数 $y=2x+b$ 的图象与 x 轴、y 轴的交点分别为 $\left(-\frac{b}{2},0\right)$，$(0,b)$. $\because$ 一次函数 $y=2x+b$ 的图象与两坐标轴所围成的三角形的面积为 4，$\therefore \frac{1}{2}|b|\cdot\left|-\frac{b}{2}\right|=4$，即 $\frac{1}{2}\times\frac{b^2}{2}=4$，解得 $b=\pm4$，故答案为 4 或 -4.

易错警示

一次函数 $y=kx+b$ 中参数 b 的正负

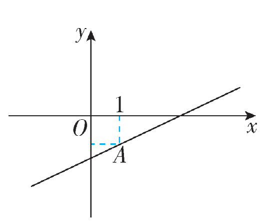
仅由一次函数 $y=2x+b$ 的图象与两坐标轴所围成的三角形的面积为 4，不能确定 b 的正负，故 b 的值有两种情况.

刷 提升

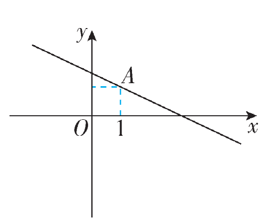
1. D 【解析】$\because$ 一次函数 $y=-2x+b$ 中，$-2<0$，$\therefore y$ 随 x 的增大而减小. $\because -1<2$，$\therefore m>n$，故选 D.

2. A 【解析】将一次函数 $y=3x+5$ 的图象向右平移 a 个单位后得到直线 $y=3(x-a)+5$，将 $(1,a)$ 代入，得 $3(1-a)+5=a$，解得 $a=2$，$\therefore$ 平移后的图象的函数表达式为 $y=3(x-2)+5=3x-1$. 故选 A.

3. $0<m\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\leqslant m<0$ 【解析】$\because y=mx-3m=m(x-3)$，$\therefore$ 一次函数 $y=mx-3m$ 的图象经过点 $(3,0)$. 分两种情况讨论：①当 $m>0$ 时，如图(1)，当 $x=1$ 时，$y=m-3m=-2m$. $\because$ 一次函数 $y=mx-3m$ 的图象上存在“近轴点”，$\therefore -1\leqslant-2m<0$，$\therefore 0<m\leqslant\frac{1}{2}$.



图(1)



图(2)

②当 $m<0$ 时，如图(2)，由①知，当 $x=1$ 时，$y=-2m$. $\because$ 一次函数 $y=mx-3m$ 的图象上存在“近轴点”，$\therefore 0<-2m\leqslant1$，$\therefore -\frac{1}{2}\leqslant m<0$. 综上，$m$ 的取值范围为 $0<m\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\leqslant m<0$. 故答案为 $0<m\leqslant\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}\leqslant m<0$.

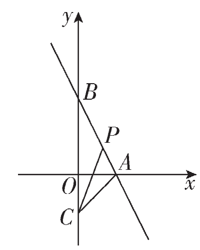
4.【解】(1) $\because$ 直线 $y=-2x+4$ 分别交 x 轴和 y 轴于点 A 和点 B，

当 $x=0$ 时，$y=4$；

当 $y=-2x+4=0$ 时，解得 $x=2$，

$\therefore A(2,0)$，$B(0,4)$.

(2) 设点 $P(a,-2a+4)$. 如图，



则 $S_{\triangle BPC}=\frac{1}{2}BC\cdot|a|=\frac{1}{2}\times(4+2)\cdot|a|=3$，

解得 $a=\pm1$，故点 P 的坐标为 $(1,2)$ 或 $(-1,6)$.

刷 素养

5.【解】(1) 在 $y=2x+4$ 中，令 $x=0$，则 $y=4$，令 $y=0$，得 $0=2x+4$，解得 $x=-2$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(0,4)$，点 B 的坐标为 $(-2,0)$，

$\therefore OA=4$，$OB=2$，故答案为 4，2.

(2) 过点 E 作 $EM\perp y$ 轴于 M，如图(1)，

则 $\angle AEM+\angle EAM=90°$.

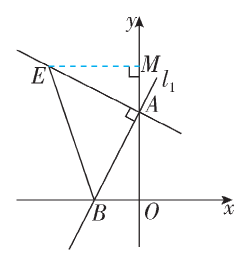
$\because \angle BAE=90°$，

$\therefore \angle EAM+\angle BAO=90°$，

$\therefore \angle AEM=\angle BAO$.

$\because AB=AE$，$\angle EMA=\angle AOB=90°$，

$\therefore \triangle EAM\cong\triangle ABO$ (AAS)，$\therefore EM=OA=4$，$AM=OB=2$，



图(1)

$\therefore OM=OA+AM=4+2=6$，

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(-4,6)$. 设直线 AE 的表达式为 $y=k_1x+b_1$，

将 $A(0,4)$，$E(-4,6)$ 代入得 $\begin{cases}-4k_1+b_1=6,\\ b_1=4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_1=-\frac{1}{2},\\ b_1=4,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 AE 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+4$. 故答案为 $(-4,6)$，$y=-\frac{1}{2}x+4$.

(3) 过点 B 作 $BC\perp l_2$ 于点 C，过点 A 作 $AD\perp y$ 轴，过点 C 作 $CD\perp AD$ 于点 D，延长 DC 与 x 轴交于点 N，如图(2).

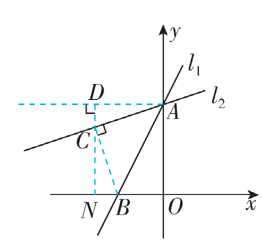
$\because \angle BCA=90°$，$\angle BAC=45°$，

$\therefore \angle BAC=\angle CBA=45°$，$\therefore AC=BC$.

$\because \angle DCA+\angle DAC=90°=\angle DCA+\angle NCB$，

$\therefore \angle DAC=\angle NCB$.

又 $\because \angle ADC=\angle BNC=90°$，



图(2)

$\therefore \triangle ACD \cong \triangle CBN(AAS)$，$\therefore CD=NB$，$AD=CN$.

易得四边形 $OADN$ 是矩形，$\therefore AD=ON$，$OA=DN$.

设 $CD=BN=x$，则 $AD=2+x$，

$\therefore CN=2+x$，$\therefore 2+x+x=4$，解得 $x=1$，

$\therefore C(-3,3)$. 设直线 AC 的表达式为 $y=k_2x+b_2$，

将 $A(0,4)$，$C(-3,3)$ 代入得 $\begin{cases}3=-3k_2+b_2,\\4=b_2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k_2=\dfrac{1}{3},\\b_2=4,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 l_2 的函数表达式为 $y=\dfrac{1}{3}x+4$.

考点 12　一次函数的实际应用

刷基础

1.【解】(1) $m=1\ 500\div 60=25$，由题意和图象可知，m 表示桐桐从 B 景点步行到 A 景点所用的时间.

(2) 设桐桐骑车时距 A 景点的距离 s(米)与 t(分)之间的函数表达式为 $s=kt+b$. 由题意得，图象经过点 $(25+10,0)$，$(50-5,3\ 500)$，即 $(35,0)$，$(45,3\ 500)$，

则 $\begin{cases}35k+b=0,\\45k+b=3\ 500,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=350,\\b=-12\ 250,\end{cases}$

$\therefore s=350t-12\ 250$.

(3) 由图象可知，小兴步行的速度为 $3\ 500\div 50=70$(米/分)，由(2)可知，桐桐骑车的速度为 350 米/分. 当 $0\leqslant t\leqslant 25$ 时，$t=1\ 500\div(70+60)=\dfrac{150}{13}$；当 $25<t\leqslant 50$ 时，$350(t-35)=70t$，解得 $t=\dfrac{175}{4}$. 综上，$t=\dfrac{150}{13}$ 或 $\dfrac{175}{4}$.

2.【解】(1) 设普通练习本的销售单价为 m 元/个，精装练习本的销售单价为 n 元/个. 由题意可得 $\begin{cases}150m+100n=1\ 450,\\200m+50n=1\ 100,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=3,\\n=10.\end{cases}$

答：普通练习本的销售单价为 3 元/个，精装练习本的销售单价为 10 元/个.

(2) ①已知购买普通练习本 x 个，则购买精装练习本 $(500-x)$ 个. 由题意可得 $W=(3-2)x+(10-7)(500-x)=-2x+1\ 500$. $\because$ 普通练习本的数量不低于精装练习本数量的 3 倍，$\therefore x\geqslant 3(500-x)$，解得 $x\geqslant 375$，$\therefore W$ 关于 x 的函数表达式是 $W=-2x+1\ 500(375\leqslant x\leqslant 500)$.

② $\because W=-2x+1\ 500$，$-2<0$，$\therefore W$ 随 x 的增大而减小. $\because 375\leqslant x\leqslant 500$，$\therefore$ 当 $x=375$ 时，W 取得最大值，此时 $W=750$，$500-x=125$.

答：当购买 375 个普通练习本，125 个精装练习本时，销售总利润最大，最大利润为 750 元.

3.【解】(1) 设每辆 A 型巴士的座位数为 m 个，每辆 B 型巴士的座位数为 n 个.

根据题意，得 $\begin{cases}10m+8n=450-10,\\8m+10n=450+10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=20,\\n=30.\end{cases}$

答：每辆 A 型巴士的座位数为 20 个，每辆 B 型巴士的座位数为 30 个.

(2) 设租用 A 型巴士 x 辆，则租用 B 型巴士 $(20-x)$ 辆. 根据题意，得 $\begin{cases}20-x\leqslant 8,\\20x+30(20-x)\geqslant 450,\end{cases}$ 解得 $12\leqslant x\leqslant 15$.

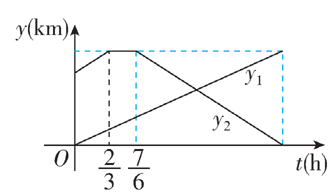
$\because x$ 为整数，$\therefore x$ 的取值为 12，13，14，15，$\therefore$ 共有 4 种租车方案. 设租车总费用为 w 元，则 $w=750x+900(20-x)=-150x+18\ 000$. $\because -150<0$，$\therefore w$ 随 x 的增大而减小，$\therefore$ 当 $x=15$ 时，w 取最小值，最小值为 $-150\times 15+18\ 000=15\ 750$.

答：共有 4 种租车方案，最低租车费用为 15 750 元.

刷提升

1. 0.6　**【解析】**设射线①所在直线的表达式为 $y=kx+b(k\neq 0)$，将 $(0,-1)$，$(1.5,0)$ 代入得 $\begin{cases}b=-1,\\1.5k+b=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=\dfrac{2}{3},\\b=-1,\end{cases}$ $\therefore$ 射线①所在直线的表达式为 $y=\dfrac{2}{3}x-1$. 由题意可知，射线②由射线①平移得到，则可设射线②所在直线的表达式为 $y=\dfrac{2}{3}x+n$，将 $(0.6,0)$ 代入，得 $\dfrac{2}{3}\times 0.6+n=0$，解得 $n=-0.4$，$\therefore$ 射线②所在直线的表达式为 $y=\dfrac{2}{3}x-0.4$，$\therefore \dfrac{2}{3}\times 1-0.4-\left(\dfrac{2}{3}\times 1-1\right)=0.6$(万元)，即优化后的收支差额较优化前增加了 0.6 万元. 故答案为 0.6.

2.【解】(1) y_1，y_2 关于 t 的函数图象如图所示：



(2) 苏州到上海的距离为 $120\times\dfrac{2}{3}=80$(km). 设南京到上海的距离为 x km. 根据题意，得 $\dfrac{x}{80}=\dfrac{7}{6}+\dfrac{x}{120}$，解得 $x=280$，$\therefore$ 南京到上海的距离为 280 km.

(3) 货车和轿车到达镇江的时间间隔为 $\dfrac{13}{8}$ h. 货车到达镇江的时间为 $90\div 80=\dfrac{9}{8}$(h)，轿车到达镇江的时间为 $\dfrac{7}{6}+(280-90)\div 120=\dfrac{33}{12}$(h)，$\dfrac{33}{12}-\dfrac{9}{8}=\dfrac{13}{8}$(h).

即货车和轿车到达镇江的时间间隔为 $\dfrac{13}{8}$ h.

刷 素养

3.【解】(1)设"滨滨"每个的进价为 m 元,则"妮妮"每个的进价是$(m-65)$元.根据题意得$\frac{28\ 000}{m}=\frac{15\ 000}{m-65}$,解得 $m=140$,经检验,$m=140$ 是原分式方程的解,$\therefore m-65=140-65=75$.

答:"滨滨"每个的进价为 140 元,"妮妮"每个的进价为 75 元.

(2)根据题意得 $y=(198-140)x+(100-75)(500-x)=33x+12\ 500$.

$\because$ 商场用不低于 60 000 元且不高于 60 250 元的资金购进"滨滨"与"妮妮",

$\therefore \begin{cases}140x+75(500-x)\geqslant 60\ 000,\\140x+75(500-x)\leqslant 60\ 250,\end{cases}$ 解得 $346\frac{2}{13}\leqslant x\leqslant 350$.

$\because x$ 为整数,$\therefore x$ 可取 347 或 348 或 349 或 350,$\therefore$ 有 4 种购买方案.

(3)捐赠"滨滨"10 个,"妮妮"10 个.

由(2)知 $y=33x+12\ 500$,$346\frac{2}{13}\leqslant x\leqslant 350$.

$\because 33>0$,$\therefore y$ 随 x 的增大而增大,$\therefore x=350$ 时,y 取最大值,最大值为 $33\times 350+12\ 500=24\ 050$.

设捐赠"滨滨"a 个,"妮妮"n 个.根据题意得 $140a+75n=24\ 050\times\frac{1}{10}-255$,$\therefore n=\frac{430-28a}{15}$.

$\because a,n$ 都为非负整数,$\therefore a=10,n=10$,

$\therefore$ 捐赠"滨滨"10 个,"妮妮"10 个.

考点 13　反比例函数

刷 基础

1. C　【解析】对于反比例函数 $y=\frac{2}{x}$,当 $x=1$ 时,$y=\frac{2}{1}=2$,所以图象经过点$(1,2)$.因为 $k=2>0$,所以该函数图象位于第一、三象限,且在每个象限内,y 随 x 的增大而减小,所以当 $x>0$ 时,y 随 x 的增大而减小,当 $x>1$ 时,$0<y<2$,故选项 C 错误,符合题意.故选 C.

刷有所得

反比例函数的性质

(1)反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象是双曲线;

(2)当 $k>0$ 时,双曲线的两支分别位于第一、三象限,在每一象限内 y 随 x 的增大而减小;

(3)当 $k<0$ 时,双曲线的两支分别位于第二、四象限,在每一象限内 y 随 x 的增大而增大.

注意:反比例函数的图象与坐标轴没有交点.

2. B　【解析】$\because$ 点 $A(x_1,-2)$,$B(x_2,4)$,$C(x_3,6)$都在反比例函数 $y=\frac{4}{x}$ 的图象上,$\therefore x_1=\frac{4}{-2}=-2$,$x_2=\frac{4}{4}=1$,$x_3=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

$\because 1>\frac{2}{3}>-2$,$\therefore x_1<x_3<x_2$,故选 B.

3. $k<2$　【解析】由图象可知,反比例函数 $y=\frac{k-2}{x}$ 的图象位于第二、四象限,$\therefore k-2<0$,$\therefore k<2$.故答案为 $k<2$.

4. A　【解析】$\because$ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点$(3,4)$,$\therefore 4=\frac{k}{3}$,$\therefore k=12$.故选 A.

方法技巧

反比例函数中 k 的计算

由点的坐标可直接求 k,k 等于反比例函数图象上的点的横、纵坐标的乘积.

5.【解】(1)由题意可得 $2=1+b$,$2=\frac{k}{1}$,

$\therefore b=1,k=2$,$\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=x+1$,反比例函数的表达式为 $y=\frac{2}{x}$.

(2)由(1)可知一次函数的表达式为 $y=x+1$,令 $x=0$,则 $y=1$,$\therefore$ 点 C 的坐标为$(0,1)$,$\therefore OC=1$;令 $y=0$,则 $x=-1$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为$(-1,0)$.$\because$ 点 P 在 x 轴上,

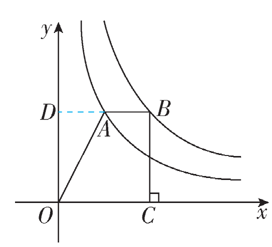
$\therefore$ 可设点 $P(a,0)$,$\therefore PB=|a+1|$.$\because \triangle BCP$ 的面积等于 3,

$\therefore \frac{1}{2}OC\cdot PB=\frac{1}{2}\times 1\times|a+1|=3$,

解得 $a=5$ 或 $a=-7$,$\therefore$ 点 P 的坐标为$(5,0)$或$(-7,0)$.

6. D　【解析】由反比例函数中 k 的几何意义可知,矩形 $OABC$ 的面积为 $|k|=4$.故选 D.

7. 3　【解析】如图,延长 BA 交 y 轴于点 D.$\because AB/\!/x$ 轴,$\therefore DB\perp y$ 轴.



$\because$ 点 A 在函数 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象上,$\therefore S_{\triangle ADO}=\frac{1}{2}\times 2=1$.

$\because BC\perp x$ 轴于点 C,$DB\perp y$ 轴,点 B 在函数 $y=\frac{4}{x}(x>0)$ 的图象上,$\therefore S_{矩形OCBD}=4$,$\therefore S_{四边形ABCO}=S_{矩形OCBD}-S_{\triangle ADO}=4-1=3$,故答案为 3.

刷 易错

8. $y=\frac{24}{x}$ 或 $y=-\frac{24}{x}$　【解析】设点 P 的坐标为(x,y).$\because P(x,y)$在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k\neq 0)$ 的图象上,$\therefore k=xy$.$\because S_{\triangle PAO}=12$,

$\therefore \frac{1}{2}|xy|=12$,$\therefore |xy|=24$,$\therefore xy=\pm 24$,$\therefore k=\pm 24$,$\therefore$ 此反比例

函数的表达式为 $y=\frac{24}{x}$ 或 $y=-\frac{24}{x}$.

易错警示

比例系数 k 与图形面积的关系

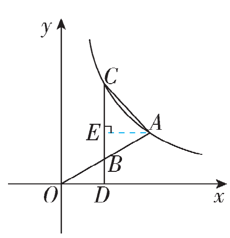
利用反比例函数中 k 的几何意义求 k 值时,要记得分类讨论.

刷 提升

1. A 【解析】若 $a>0,b>0$,则 $y=ax+b$ 的图象经过第一、二、三象限,$y=\frac{ab}{x}(a\neq0,b\neq0)$ 的图象位于第一、三象限;若 $a>0$,$b<0$,则 $y=ax+b$ 的图象经过第一、三、四象限,$y=\frac{ab}{x}(a\neq0,b\neq0)$ 的图象位于第二、四象限;若 $a<0,b>0$,则 $y=ax+b$ 的图象经过第一、二、四象限,$y=\frac{ab}{x}(a\neq0,b\neq0)$ 的图象位于第二、四象限;若 $a<0,b<0$,则 $y=ax+b$ 的图象经过第二、三、四象限,$y=\frac{ab}{x}(a\neq0,b\neq0)$ 的图象位于第一、三象限,故选 A.

2. A 【解析】$\because 2\ 025>0$,$\therefore$ 函数 $y=\frac{2\ 025}{x}$ 的图象位于第一、三象限,在每个象限内,y 随 x 的增大而减小,当 $x<0$ 时,$y<0$,当 $x>0$ 时,$y>0$. 已知 $P(m,y_1)$,$Q(m+6,y_2)$ 两点在反比例函数 $y=\frac{2\ 025}{x}$ 的图象上,当 $m<-6$ 时,$m+6<0$,则 $y_2<y_1<0$,故 A 选项正确,符合题意;当 $-6<m<0$ 时,$0<m+6<6$,则 $y_1<0<y_2$,故 B、C 选项错误,不符合题意;当 $m>0$ 时,$m+6>6$,则 $0<y_2<y_1$,故 D 选项错误,不符合题意. 故选 A.

3. C 【解析】如图,作 $AE\perp CD$ 于点 E. 设点 $A(m,n)$,则 $mn=k$. $\because$ 点 B 是 OA 的中点,$\therefore OB=AB$,点 B 的坐标为 $\left(\frac{m}{2},\frac{n}{2}\right)$,$\therefore OD=\frac{m}{2}$,$BD=\frac{n}{2}$. $\because \angle OBD=\angle ABE$,$\angle BDO=\angle BEA=90°$,$\therefore \triangle OBD\cong\triangle ABE$,$\therefore AE=OD=\frac{m}{2}$. $\because CD\perp x$ 轴,$\therefore$ 点 C 的坐标为 $\left(\frac{m}{2},\frac{k}{\frac{m}{2}}\right)$,即 $\left(\frac{m}{2},2n\right)$,$\therefore DC=2n$,$\therefore BC=\frac{3}{2}n$. $\because \triangle ABC$ 的面积是 3,$\therefore \frac{1}{2}BC\cdot AE=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}n\cdot\frac{1}{2}m=\frac{3}{8}mn=\frac{3}{8}k=3$,$\therefore k=8$. 故选 C.



4. $-1<x<0$ 或 $x>1$ 【解析】$\because$ 点 A 的坐标为 $(-1,3)$,$\therefore$ 反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}(k_1\neq0)$ 的图象与正比例函数 $y=k_2x(k_2\neq0)$ 的图象的另一个交点 B 的坐标为 $(1,-3)$,$\therefore$ 关于 x 的不等式 $\frac{k_1}{x}>k_2x$ 的解集为 $-1<x<0$ 或 $x>1$,故答案为 $-1<x<0$ 或 $x>1$.

5. -5 【解析】$\because$ 正比例函数 $y=kx(k<0)$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象相交于 A,C 两点,$\therefore$ 点 A,C 关于原点对称,$\therefore |y_A|=|y_C|$. $\because S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}OB\times|y_A|$,$S_{\triangle COB}=\frac{1}{2}OB\times|y_C|$,$\therefore S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COB}$. $\because BC\perp x$ 轴于点 B,$\therefore S_{\triangle COB}=\frac{1}{2}|k|$,$\therefore S_{\triangle COB}=S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|k|$,$\therefore S_{\triangle ABC}=S_{\triangle COB}+S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}|k|+\frac{1}{2}|k|=5$,解得 $k=5$ 或 $k=-5$. $\because k<0$,$\therefore k=-5$. 故答案为 -5.

刷 素养

6. 【解】(1) 将点 $A(-6,6)$ 代入 $y=\frac{k}{x}$,得 $k=(-6)\times6=-36$,$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{36}{x}$. 将点 $B(m,-2)$ 代入 $y=-\frac{36}{x}$,得 $-2=-\frac{36}{m}$,解得 $m=18$,$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(18,-2)$. 将点 $A(-6,6)$,$B(18,-2)$ 分别代入 $y=ax+b$,得 $\begin{cases}6=-6a+b,\\-2=18a+b,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{3},\\b=4,\end{cases}$ $\therefore$ 一次函数的表达式为 $y=-\frac{1}{3}x+4$.

(2) 将 $x=0$ 代入 $y=-\frac{1}{3}x+4$,得 $y=4$;令 $y=-\frac{1}{3}x+4=0$,解得 $x=12$,$\therefore$ 点 C 的坐标为 $(0,4)$,点 D 的坐标为 $(12,0)$,$\therefore OC=4$,$OD=12$,$\therefore CD=\sqrt{4^2+12^2}=4\sqrt{10}$.

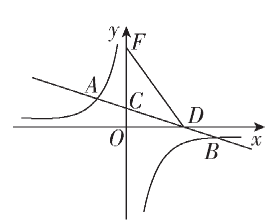
①当 $DF=CD$ 时,易知此时点 F 与点 C 关于 x 轴对称,$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(0,-4)$.

②当 $CF=CD$ 时,分以下两种情况:

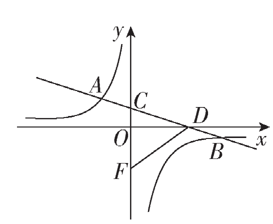
当点 F 在点 C 的上方时,如图(1)所示,$CF=CD=4\sqrt{10}$,$\therefore OF=OC+CF=4+4\sqrt{10}$,$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(0,4+4\sqrt{10})$;

当点 F 在点 C 的下方时,如图(2)所示,$CF=CD=4\sqrt{10}$,$\therefore OF=CF-OC=4\sqrt{10}-4$,$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(0,4-4\sqrt{10})$.

综上所述,点 F 的坐标为 $(0,-4)$ 或 $(0,4+4\sqrt{10})$ 或 $(0,4-4\sqrt{10})$.



图(1)



图(2)

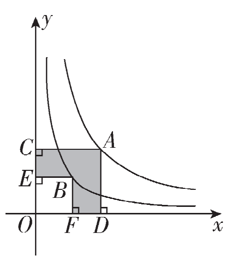
专题 1 反比例函数中 k 的几何意义

刷 难关

1. $\frac{9}{2}$ 【解析】$\because AB\perp y$ 轴于点 B，$\triangle ABO$ 的面积为 $\frac{9}{4}$，$\therefore \frac{1}{2}k=\frac{9}{4}$，$\therefore k=\frac{9}{2}$，故答案为 $\frac{9}{2}$.

2. 4 【解析】$\because PB\perp x$ 轴于点 B，点 C 在 x 轴负半轴上，$BO=2CO$，$\therefore S_{\triangle POB}=2S_{\triangle POC}$. $\because \triangle PBC$ 的面积为 3，$\therefore S_{\triangle POB}=\frac{2}{3}S_{\triangle PBC}=\frac{2}{3}\times3=2$，$\therefore \frac{1}{2}k=2$，$\therefore k=4$. 故答案为 4.

3. B 【解析】如图所示，$\because$ 点 A,B 分别在反比例函数 $y=\frac{8}{x}(x>0)$ 和 $y=\frac{2}{x}(x>0)$ 的图象上，且 $AD\perp x$ 轴，$AC\perp y$ 轴，$BF\perp x$ 轴，$BE\perp y$ 轴，$\therefore$ 四边形 $ACOD$ 和四边形 $BEOF$ 为矩形. 根据反比例函数中 k 的几何意义，得 $S_{矩形ACOD}=8$，$S_{矩形BEOF}=2$，则阴影部分的面积为 $S_{矩形ACOD}-S_{矩形BEOF}=6$，故选 B.



4. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 【解析】在 $y=x+k+1$ 中，当 $x=0$ 时，$y=x+k+1=k+1$；当 $y=0$ 时，$x+k+1=0$，解得 $x=-k-1$，$\therefore$ 点 A 的坐标为 $(-k-1,0)$，点 B 的坐标为 $(0,k+1)$. $\because k>0$，$\therefore OA=k+1$，$OB=k+1$，$\therefore S_{\triangle OAB}=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}(k+1)^2$. $\because$ 点 C 是反比例函数 $y=\frac{k+2}{x}$ 的图象在第一象限内一点，$\therefore$ 矩形 $ODCE$ 的面积为 $k+2$. 当矩形 $ODCE$ 的面积是 $\triangle OAB$ 的面积的 2 倍时，$k+2=2\times\frac{1}{2}(k+1)^2$，解得 $k=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}$（舍去）或 $k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 故答案为 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

5. (1)【解】$\because PM\perp x$ 轴，$PN\perp y$ 轴，$\therefore$ 四边形 $PMON$ 是矩形.

$\because$ 点 P 在反比例函数 $y=-\frac{4}{x}(x<0)$ 图象上，

$\therefore S_{矩形PMON}=|-4|=4$.

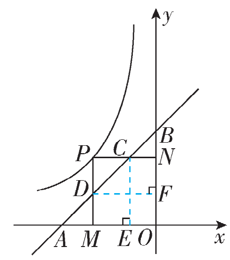
(2)①【证明】在 $y=x+b$ 中，令 $x=0$，则 $y=b$；令 $y=0$，则 $x=-b$，$\therefore A(-b,0)$，$B(0,b)$，$\therefore OA=OB=b$.

$\because \angle AOB=90°$，

$\therefore AB=\sqrt{OA^2+OB^2}=\sqrt{2OB^2}=\sqrt{2}OB$.

②【解】由①知 $\triangle AOB$ 是等腰直角三角形，

$\therefore \angle ABO=\angle BAO=45°$. 如图，过 C 作 $CE\perp x$ 轴于 E，过 D 作 $DF\perp y$ 轴于 F，

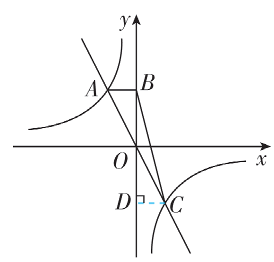


则易知四边形 $PMEC$ 是矩形，$\triangle ACE$，$\triangle BDF$ 是等腰直角三角形，$\therefore CE=AE=PM=\frac{\sqrt{2}}{2}m$，$DF=BF=PN=\frac{\sqrt{2}}{2}n$，

$\therefore PM\cdot PN=\frac{\sqrt{2}}{2}m\times\frac{\sqrt{2}}{2}n=4$，$\therefore m=\frac{8}{n}$，

$\therefore m$ 与 n 之间的函数关系式为 $m=\frac{8}{n}(n>0)$.

6. -2 【解析】如图，过点 C 作 $CD\perp y$ 轴于点 D. $\because$ 函数 $y=ax(a<0)$ 与函数 $y=\frac{k}{x}(k<0)$ 的图象交于点 A,C，$\therefore A,C$ 两点关于坐标原点对称. $\because AB\perp y$ 轴，$\therefore AB=CD$，$\therefore \frac{1}{2}AB\times OB=\frac{1}{2}CD\times OB$，即 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle COB}=1$，$\therefore -\frac{1}{2}k=1$，$\therefore k=-2$. 故答案为 -2.



7. D 【解析】过 D 点作 x 轴的垂线，垂足为 E 点. $\because \triangle ODE$ 的面积和 $\triangle OBC$ 的面积相等，都为 $\frac{1}{2}k$，$S_{\triangle OAC}=16$，$\therefore S_{\triangle OBA}=16+\frac{1}{2}k$. $\because AD:OD=2:3$，$\therefore OD:OA=3:5$. $\because DE\perp x$ 轴，$\therefore DE\,/\!/\,AB$，$\therefore \triangle ODE\backsim\triangle OAB$，$\therefore \frac{S_{\triangle ODE}}{S_{\triangle OAB}}=\left(\frac{OD}{OA}\right)^2=\frac{9}{25}$，

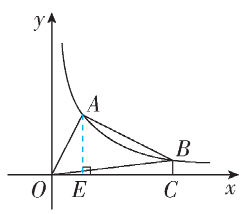
$\therefore \frac{\frac{k}{2}}{16+\frac{k}{2}}=\frac{9}{25}$，$\therefore k=18$. 故选 D.

8. C 【解析】$\because A(-2,3)$，$AB\perp y$ 轴于点 B，$AC\perp x$ 轴于点 C，$\therefore OB=3$，$OC=2$，四边形 $ABOC$ 是矩形，$\therefore S_{矩形ABOC}=OB\cdot OC=$

6. ∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}(k<0,x<0)$ 的图象分别与 AB,AC 相交于 E,F 两点，∴ $S_{\triangle BOE}=S_{\triangle COF}=-\frac{1}{2}k$. ∵ 四边形 $AFOE$ 的面积为 4，∴ $S_{矩形ABOC}-S_{\triangle BOE}-S_{\triangle COF}=S_{四边形AFOE}=4$，∴ $6+k=4$，解得 $k=-2$，故选 C.

9. B 【解析】设 BC 与 y 轴交于点 E. ∵ 双曲线 $y=\frac{k}{x}$ 与直线 $y=\frac{1}{4}x$ 交于 A,B 两点，∴ 点 A,B 关于原点对称，∴ 易得 $S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle BOE}$. ∵ $S_{\triangle BOE}=\frac{1}{2}k$，∴ $4\times\frac{1}{2}k=8$，∴ $k=4$. 故选 B.

10.【解】如图，过点 A 作 $AE\perp x$ 轴，垂足为 E.



令 $y=4$，则 $4=\frac{k}{x}$，解得 $x=\frac{k}{4}$，

令 $x=8$，则 $y=\frac{k}{8}$，∴ $A\left(\frac{k}{4},4\right)$，$B\left(8,\frac{k}{8}\right)$，

∴ $OE=\frac{k}{4}$，$AE=4$，$BC=\frac{k}{8}$.

由题意得 $S_{\triangle AOE}=S_{\triangle BOC}=\frac{1}{2}k$，则 $S_{\triangle AOB}=S_{\triangle AOE}+S_{梯形AECB}-S_{\triangle BOC}=S_{梯形AECB}=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{8}+4\right)\left(8-\frac{k}{4}\right)$，

∴ $\frac{1}{2}\left(\frac{k}{8}+4\right)\left(8-\frac{k}{4}\right)=15$，解得 $k=\pm8$. ∵ $k>0$，∴ $k=8$.

考点 14　反比例函数的实际应用

刷 提升

1.【解】(1) ∵ 左盘砝码质量×OA=右盘物体质量×OP，右侧托盘中放置物体的质量为 y(g)，OP 的长为 x(cm)，砝码的质量是 100 g，$OA=10$ cm，∴ $100\times10=xy$，

∴ $y=\frac{1\ 000}{x}$. ∵ $OC=10$ cm，$BC=25$ cm，

∴ $OB=35$ cm. ∵ 点 P 可以在横梁 BC 段滑动（点 P 不与 B,C 重合），

∴ $10<OP<35$，即 $10<x<35$，

∴ y 关于 x 的函数表达式为 $y=\frac{1\ 000}{x}(10<x<35)$.

(2) 设这个空矿泉水瓶的质量为 m g.

根据题意，得 $100\times10=(10+15)(28+m)$，解得 $m=12$，∴ 这个空矿泉水瓶的质量为 12 g.

2.【解】(1) 由题意可知 v 与 t 之间的函数关系是反比例函数，则设 v 与 t 之间的函数关系式为 $v=\frac{k}{t}(k\neq0)$. 把 (6,100) 代入得，$100=\frac{k}{6}$，

解得 $k=600$，∴ v 与 t 之间的函数关系式是 $v=\frac{600}{t}$.

(2) 由题意得，$6\leqslant t\leqslant7.5$.

当 $t=6$ 时，$v=\frac{600}{6}=100$，

当 $t=7.5$ 时，$v=\frac{600}{7.5}=80$.

∵ v 随着 t 的增大而减小，∴ $80\leqslant v\leqslant100$，

即这辆客车平均速度 v 的取值范围为 $80\leqslant v\leqslant100$.

3. B 【解析】当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时，设 $y=kx$，将 (4,8) 代入得 $8=4k$，解得 $k=2$，故 $y=2x$；当 $x>4$ 时，设 $y=\frac{a}{x}$，将 (4,8) 代入得 $8=\frac{a}{4}$，解得 $a=32$，故 $y=\frac{32}{x}$. 当 $0\leqslant x\leqslant4$ 时，令 $y=4$，则 $x=2$；当 $x>4$ 时，令 $y=4$，则 $x=\frac{32}{4}=8$，∴ $8-2=6$(时). 故选 B.

4. A 【解析】由题意可得，$vt=10^6$，∴ $v=\frac{10^6}{t}$. 故选 A.

专题 2　反比例函数与一次函数的综合

刷 难关

1.【解】(1) 将 $B(0,1)$ 代入 $y=2x+b$，得 $b=1$，∴ 直线 l 的表达式为 $y=2x+1$. ∵ 直线 l 经过双曲线 CD：$y=\frac{m}{x}(1\leqslant x\leqslant3)$ 的左端点 C，∴ $C(1,3)$，∴ $m=1\times3=3$，∴ 双曲线 CD 的表达式为 $y=\frac{3}{x}(1\leqslant x\leqslant3)$，当 $x=3$ 时，$y=1$，∴ $D(3,1)$.

(2) 设直线 l' 的表达式为 $y=2x+n$. ∵ 直线 l' 经过双曲线的右端点 D，∴ 把 $D(3,1)$ 代入得 $n=-5$，∴ 直线 l' 的表达式为 $y=2x-5$. 当 $y=0$ 时，$x=2.5$，即 $E(2.5,0)$. ∵ 直线 l 的表达式为 $y=2x+1$，∴ 当 $y=0$ 时，$x=-0.5$，即 $A(-0.5,0)$，∴ $AE=0.5+2.5=3$.

2.【解】(1) 把 $A(-1,m)$ 代入一次函数 $y=x+4$，得 $m=-1+4=3$，∴ $A(-1,3)$.

把 $A(-1,3)$ 代入反比例函数 $y=\frac{k}{x}$，得 $k=-3$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=-\frac{3}{x}(x<0)$.

(2) $-3<x<-1$. 联立$\begin{cases}y=x+4,\\ y=-\dfrac{3}{x},\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=-1,\\ y_1=3,\end{cases}\begin{cases}x_2=-3,\\ y_2=1,\end{cases}$

$\therefore B(-3,1)$，$\therefore$ 结合图象可得，

当 $x<0$ 时，不等式$\dfrac{k}{x}<x+4$ 的解集为$-3<x<-1$.

刷有所得

反比例函数与一次函数图象的交点问题

(1) 求反比例函数与一次函数图象的交点坐标，要把两个函数表达式联立成方程组求解，若方程组有解，则两者有交点；若方程组无解，则两者无交点.

(2) 判断正比例函数 $y=k_1x$ 和反比例函数 $y=\dfrac{k_2}{x}$ 的图象在同一直角坐标系中的交点个数可总结为①当 k_1 与 k_2 同号时，有 2 个交点；②当 k_1 与 k_2 异号时，没有交点.

3.【解】(1) 将 $Q(2,2)$ 代入 $y=\dfrac{k}{x}$，

得 $2=\dfrac{k}{2}$，解得 $k=4$.

(2) 由 (1) 得，反比例函数表达式为 $y=\dfrac{4}{x}$.

将 $Q(2,2)$ 代入 $y=-2x+b$，

得 $2=-2\times2+b$，解得 $b=6$，

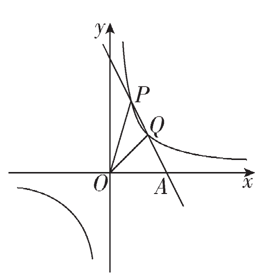
$\therefore$ 一次函数表达式为 $y=-2x+6$. 联立$\begin{cases}y=\dfrac{4}{x},\\ y=-2x+6,\end{cases}$

解得$\begin{cases}x_1=1,\\ y_1=4,\end{cases}\begin{cases}x_2=2,\\ y_2=2,\end{cases}$ $\therefore$ 点 P 的坐标为 $(1,4)$.

(3) 如图，设函数 $y=-2x+6$ 的图象交 x 轴于点 A.

令 $y=0$，则 $-2x+6=0$，解得 $x=3$，

$\therefore A(3,0)$，$\therefore OA=3$，



$\therefore S_{\triangle POQ}=S_{\triangle POA}-S_{\triangle AOQ}=\dfrac{1}{2}OA\cdot y_P-\dfrac{1}{2}OA\cdot y_Q=\dfrac{1}{2}\times3\times4-\dfrac{1}{2}\times3\times2=3.$

4.【解】(1) 当 $x=-4$ 时，$y=x+2=-2$，

$\therefore A(-4,-2)$，即 $a=-2$. 将 $A(-4,-2)$ 代入 $y=\dfrac{k}{x}$，得 $k=8$，

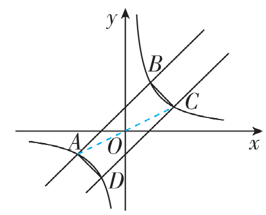
$\therefore$ 反比例函数表达式为 $y=\dfrac{8}{x}$. 联立$\begin{cases}y=x+2,\\ y=\dfrac{8}{x},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=-4,\\ y=-2\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=2,\\ y=4,\end{cases}$ $\therefore B(2,4)$. 综上所述，$a=-2$，$k=8$，$B(2,4)$.

(2) $\because$ 将直线 AB：$y=x+2$ 向下平移 4 个单位长度后得到直线 CD，$\therefore$ 直线 CD 的函数表达式为 $y=x-2$.

联立$\begin{cases}y=x-2,\\ y=\dfrac{8}{x},\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=4,\\ y=2\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-2,\\ y=-4,\end{cases}$

$\therefore C(4,2)$，$D(-2,-4)$.

连接 AC，如图.



$\because A(-4,-2)$，$B(2,4)$，$C(4,2)$，

$\therefore AB^2=(2+4)^2+(4+2)^2=72$，$AC^2=(4+4)^2+(2+2)^2=80$，$BC^2=(4-2)^2+(2-4)^2=8$，

$\therefore AC^2=AB^2+BC^2$，$AB=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$，$BC=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$，$\therefore$ $\triangle ABC$ 是直角三角形，且 $\angle ABC=90°$，同理可证 $\angle ADC=\angle BAD=\angle BCD=90°$，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是矩形，$\therefore S_{矩形ABCD}=AB\cdot BC=24$.

5.【解】(1) 把 $A(2,-3)$ 代入 $y=\dfrac{k_2}{x}$，得

$-3=\dfrac{k_2}{2}$，解得 $k_2=-6$，

$\therefore$ 反比例函数的表达式为 $y=-\dfrac{6}{x}$.

把 $B(-3,m)$ 代入 $y=-\dfrac{6}{x}$，得 $m=-\dfrac{6}{-3}=2$，

$\therefore B(-3,2)$. 把 $A(2,-3)$，$B(-3,2)$ 代入 $y=k_1x+b$，得

$\begin{cases}2k_1+b=-3,\\ -3k_1+b=2,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k_1=-1,\\ b=-1,\end{cases}$

$\therefore$ 直线 l 的函数表达式为 $y=-x-1$.

(2) 在 $y=-x-1$ 中，令 $y=0$，则 $0=-x-1$，解得 $x=-1$，

$\therefore C(-1,0)$，$\therefore OC=1$，

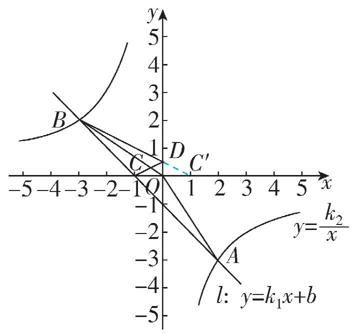
$\therefore S_{\triangle ABO}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle BOC}=\dfrac{1}{2}OC\times|y_A|+\dfrac{1}{2}OC\times|y_B|=\dfrac{1}{2}\times1\times(3+2)=\dfrac{5}{2}$.

设点 $P(n,0)$，$\therefore S_{\triangle PBO}=\dfrac{1}{2}OP\times|y_B|=\dfrac{1}{2}|n|\times2=|n|$.

$\because S_{\triangle PBO}=2S_{\triangle ABO}$，$\therefore |n|=2\times\dfrac{5}{2}=5$，$\therefore n=\pm5$，

$\therefore$ 点 P 的坐标为 $(5,0)$ 或 $(-5,0)$.

(3) 存在. 如图，作点 C 关于 y 轴的对称点 C'，连接 BC' 交 y 轴于点 D，则 $C'(1,0)$，$CD=C'D$，此时 $\triangle BCD$ 的周长最小，



为 $BC+BD+CD=BC+BD+C'D=BC'+BC$. 设直线 BC' 的表达式为 $y=ax+n$.

把 $B(-3,2)$, $C'(1,0)$ 代入,得 $\begin{cases}-3a+n=2,\\a+n=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\n=\frac{1}{2},\end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC' 的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$. 当 $x=0$ 时, $y=\frac{1}{2}$,

$\therefore D\left(0,\frac{1}{2}\right)$.

6.【解】(1) $\because$ 直线 $y=-\frac{3}{2}x$ 与反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象相交于 A,B 两点,点 B 的纵坐标为 3,令 $-\frac{3}{2}x=3$,解得 $x=-2$,

$\therefore$ 点 B 的坐标为 $(-2,3)$, $\therefore 3=\frac{k}{-2}$, $\therefore k=-6$, $\therefore y=-\frac{6}{x}$.

$\because y=-\frac{3}{2}x$ 与 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象的交点关于原点对称, $\therefore$ 点 A 与点 B 关于原点对称, $\therefore A(2,-3)$.

(2) 由(1)可知, $OA=OB$.

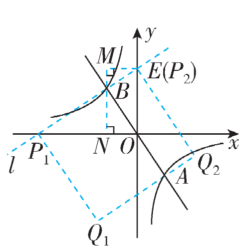
又 $\because OC/\!/AD$, $\therefore \frac{OB}{OA}=\frac{CB}{CD}=1$, $\therefore BC=CD$.

设 $D(x_0,0)$,则 $C\left(\frac{x_0-2}{2},\frac{3}{2}\right)$. $\because C\left(\frac{x_0-2}{2},\frac{3}{2}\right)$ 在 $y=-\frac{6}{x}$ 的图象上, $\therefore \frac{3}{2}\left(\frac{x_0-2}{2}\right)=-6$, $\therefore x_0=-6$, $\therefore D(-6,0)$, $\therefore OD=6$,

$\therefore S_{\triangle AOD}=\frac{1}{2}OD\cdot|y_A|=\frac{1}{2}\times6\times3=9$.

(3) 存在点 P,Q,使得四边形 $ABPQ$ 是矩形.

如图,过点 B 作 AB 的垂线 l,交 y 轴于点 E,过点 B 作 $BN\perp x$ 轴于点 N,过点 E 作 $EM\perp BN$,交 NB 延长线于点 M,



$\therefore \angle M=\angle MNO=\angle NOE=90°$,

$\therefore$ 四边形 $EMNO$ 是矩形, $\therefore ME=ON=2$, $MN=OE$,

$\therefore \angle EBM=90°-\angle OBN=\angle BON$,

$\therefore \triangle EMB\backsim\triangle BNO$, $\therefore \frac{EM}{BN}=\frac{BM}{ON}$,

$\therefore BM=\frac{4}{3}$,

$\therefore MN=OE=3+\frac{4}{3}=\frac{13}{3}$, $\therefore E\left(0,\frac{13}{3}\right)$.

设直线 l 的表达式为 $y=nx+\frac{13}{3}$. 将 $B(-2,3)$ 代入可得 $n=\frac{2}{3}$,

$\therefore$ 直线 l 的表达式为 $y=\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}$. 当 $y=0$ 时, $\frac{2}{3}x+\frac{13}{3}=0$,解得 $x=-\frac{13}{2}$, $\therefore$ 直线 l 与 x 轴的交点为 $P_1\left(-\frac{13}{2},0\right)$,直线 l 与 y 轴的交点为 $P_2\left(0,\frac{13}{3}\right)$(与点 E 重合). $\because$ 四边形 $ABPQ$ 是矩形,

$\therefore PQ/\!/AB$, $PQ=AB=\sqrt{(-2-2)^2+(3+3)^2}=2\sqrt{13}$, $BP=AQ$.

作出 P 在 P_1 和 P_2 处时相应的矩形 ABP_1Q_1 和矩形 ABP_2Q_2,

设 P_1Q_1 所在直线的表达式为 $y=-\frac{3}{2}x+b_1$, P_2Q_2 所在直线的表达式为 $y=-\frac{3}{2}x+b_2$.

将 $P_1\left(-\frac{13}{2},0\right)$ 代入 $y=-\frac{3}{2}x+b_1$,得 $b_1=-\frac{39}{4}$,即 P_1Q_1 所在直线的表达式为 $y=-\frac{3}{2}x-\frac{39}{4}$,

此时 $AQ_1=BP_1=\sqrt{\left(-2+\frac{13}{2}\right)^2+(3-0)^2}=\frac{3\sqrt{13}}{2}$.

设 $Q_1\left(q,-\frac{3}{2}q-\frac{39}{4}\right)$,

则 $\begin{cases}\sqrt{\left(-\frac{13}{2}-q\right)^2+\left(\frac{3}{2}q+\frac{39}{4}\right)^2}=2\sqrt{13},\\\sqrt{(2-q)^2+\left(-3+\frac{3}{2}q+\frac{39}{4}\right)^2}=\frac{3\sqrt{13}}{2},\end{cases}$

$\therefore q=-\frac{5}{2}$,即 $Q_1\left(-\frac{5}{2},-6\right)$.

将 $P_2\left(0,\frac{13}{3}\right)$ 代入 $y=-\frac{3}{2}x+b_2$,得 $b_2=\frac{13}{3}$,即 P_2Q_2 所在直线的表达式为 $y=-\frac{3}{2}x+\frac{13}{3}$,

同理可得 $Q_2\left(4,-\frac{5}{3}\right)$.

综上所述, $Q_1\left(-\frac{5}{2},-6\right)$ 或 $Q_2\left(4,-\frac{5}{3}\right)$.

考点 15　二次函数

刷基础

1. D　【解析】$\because y=x^2-2x-4=x^2-2x+1-5=(x-1)^2-5$, $\therefore$ 抛物线 $y=x^2-2x-4$ 的顶点坐标为 $(1,-5)$. 故选 D.

2. A　【解析】抛物线 $y=ax^2+k(a\neq0,k>0)$ 的对称轴为 y 轴,顶点坐标为 $(0,k)$,故 A 选项正确,B,C,D 选项错误. 故选 A.

3. D 【解析】A 选项,$y=-(x+2)^2-3$ 中,$a=-1<0$,则抛物线开口向下,故 A 选项错误,不符合题意;B 选项,抛物线 $y=-(x+2)^2-3$ 的对称轴是直线 $x=-2$,故 B 选项错误,不符合题意;C 选项,令 $x=0$,函数值 $y=-(0+2)^2-3=-7$,则抛物线与 y 轴的交点坐标是 $(0,-7)$,故 C 选项错误,不符合题意;D 选项,抛物线 $y=-(x+2)^2-3$ 的顶点坐标为 $(-2,-3)$,故 D 选项正确,符合题意. 故选 D.

4. A 【解析】由题意得,二次函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{-3a}{2a}=\frac{3}{2}$. ∵ $a>0$,∴ 抛物线开口向上,函数有最小值,且离对称轴越远,函数值越大. ∵ $A(0,y_1)$,$B(-1,y_2)$,$C(2,y_3)$,$\left|\frac{3}{2}-2\right|<\left|\frac{3}{2}-0\right|<\left|\frac{3}{2}-(-1)\right|$,∴ $y_3<y_1<y_2$,故选 A.

5. B 【解析】A 选项,由二次函数图象可得 $a>0,c<0$,由一次函数图象可得 $a<0,c<0$,故不符合题意;B 选项,由二次函数图象可得 $a>0,c>0$,由一次函数图象可得 $a>0,c>0$,且两函数图象与 y 轴交于同一点,故符合题意;C 选项,由二次函数图象可得 $a<0,c>0$,由一次函数图象可得 $a<0,c<0$,故不符合题意;D 选项,由二次函数图象可得 $a<0,c>0$,由一次函数图象可得 $a>0,c>0$,故不符合题意. 故选 B.

6. B 【解析】二次函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{-4a}{2a}=2$. ∵ 当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小,∴ 抛物线开口向上,∴ $a>0$,抛物线上的点离对称轴越远,函数值越大. ∵ $-1\leqslant x\leqslant 4$,$|-1-2|>|4-2|$,∴ 当 $x=-1$ 时,y 有最大值为 $a+4a+3a^2-6=2$,解得 $a=1$ 或 $a=-\frac{8}{3}$(舍去). 故选 B.

7. D 【解析】由题意可得$\begin{cases}1-b+c=-3,\\25+5b+c=-3,\end{cases}$解得$\begin{cases}b=-4,\\c=-8,\end{cases}$∴ $y=x^2-4x-8$. ①∵ 二次函数 $y=x^2-4x-8$ 中,$a=1>0$,∴ 抛物线开口向上. ∵ 抛物线对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2$,∴ 在对称轴的左侧,$y$ 随 x 的增大而减小,∴ 当 $x<0$ 时,y 随 x 的增大而减小,故①正确. ②∵ 点 $(0,m)$,$(5,n)$ 在该函数的图象上,且 $|0-2|<|5-2|$,∴ $m<n$,故②错误. ③∵ 图象开口向上,∴ 该函数的图象有最低点,故③正确. ④该函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=-\frac{-4}{2}=2$,故④错误. 故选 D.

8. A 【解析】∵ $y=3x^2+2x-5=3\left(x^2+\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}\right)=3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{9}-\frac{5}{3}\right]=3\left[\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{9}\right]=3\left(x+\frac{1}{3}\right)^2-\frac{16}{3}$,∴ 将函数 $y=3x^2+2x-5$ 的图象先向上平移 6 个单位长度,再向左平移 4 个单位长度,得到的新图象的函数表达式为 $y=3\left(x+\frac{1}{3}+4\right)^2-\frac{16}{3}+6=3\left(x+\frac{13}{3}\right)^2+\frac{2}{3}=3\left(x^2+\frac{26}{3}x+\frac{169}{9}\right)+\frac{2}{3}=3x^2+26x+57$,故选 A.

9. $y=(x-3)^2+2$ 【解析】根据抛物线的顶点坐标为 $(1,-1)$,可设题图所示的抛物线的函数表达式为 $y=a(x-1)^2-1$. ∵ 抛物线过原点,∴ 把 $(0,0)$ 代入得 $0=a(0-1)^2-1$,解得 $a=1$,∴ 题图所示的抛物线的函数表达式为 $y=(x-1)^2-1$,∴ 将该抛物线向右平移 2 个单位长度,再向上平移 3 个单位长度,平移后所得抛物线的函数表达式为 $y=(x-1-2)^2-1+3=(x-3)^2+2$. 故答案为 $y=(x-3)^2+2$.

10. $y=-2(x+1)^2+6$ 【解析】∵ 抛物线的顶点坐标为 $(-1,6)$,∴ 抛物线的函数表达式可设为 $y=a(x+1)^2+6$. ∵ 抛物线 $y=a(x+1)^2+6$ 的形状、开口方向均与抛物线 $y=-2x^2+9x$ 相同,∴ $a=-2$,∴ 所求抛物线的表达式为 $y=-2(x+1)^2+6$. 故答案为 $y=-2(x+1)^2+6$.

11. B 【解析】根据题意得 $2^2-4\times1\times m=4-4m<0$,解得 $m>1$. 故选 B.

12. C 【解析】由图象得对称轴是直线 $x=2$,与 x 轴的其中一个交点的坐标为 $(5,0)$,∴ 图象与 x 轴的另一个交点坐标为 $(-1,0)$,∴ 由图象可知,不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解集为 $x<-1$ 或 $x>5$. 故选 C.

13. D 【解析】∵ 抛物线 $y=-x^2+x-t$(t 为常数)与直线 $y=3x$ 有两个不同的交点,且交点的横坐标都满足 $-2<x<0$,∴ 方程 $-x^2+x-t=3x$,即 $x^2+2x+t=0$ 在 $-2<x<0$ 范围内有两个不相等的实数根,∴ 二次函数 $y=x^2+2x+t=(x+1)^2+t-1$ 的图象在 $-2<x<0$ 范围内与 x 轴有两个交点. 由二次函数的性质可知,该二次函数的图象开口向上,对称轴为直线 $x=-1$,顶点坐标为 $(-1,t-1)$,且当 $x=-2$ 和 $x=0$ 时,$y=t$,∴ $\begin{cases}t-1<0,\\t>0,\end{cases}$解得 $0<t<1$,故选 D.

14. C 【解析】由题意得,x_1 和 x_2 为方程 $kx+b=ax^2$,即 $ax^2-kx-b=0$ 的两个根,∴ $x_1+x_2=\frac{k}{a}$,$x_1x_2=-\frac{b}{a}$,∴ $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{\frac{k}{a}}{-\frac{b}{a}}=-\frac{k}{b}$. ∵ 直线 $y=kx+b$ 与 x 轴交点的横坐标为 $x_3=-\frac{b}{k}$,∴ $\frac{1}{x_3}=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$,∴ $x_1x_2=x_2x_3+x_3x_1$. 故选 C.

15. 【解】(1)∵ $y=-(x-2)^2+7$,∴ 该函数图象的对称轴是直线 $x=2$.

(2)由题意,令 $y=0$,∴ $0=-(x-2)^2+7$,∴ $x=2+\sqrt{7}$ 或 $x=2-\sqrt{7}$,

∴ 该函数图象与 x 轴的交点坐标为 $(2+\sqrt{7},0)$,$(2-\sqrt{7},0)$.

(3)∵ $y=-(x-2)^2+7$,

∴ 当 $x=2$ 时,y 取最大值,为 7.

又∵当 $x=-1$ 时，$y=-2$；当 $x=3$ 时，$y=6$，

∴当 $-1\leqslant x\leqslant 3$ 时，$-2\leqslant y\leqslant 7$.

16.【解】(1) 将 $A\left(m,\dfrac{25}{4}\right)$ 和 $B(1,n)$ 代入 $y_2=-\dfrac{3}{2}x+\dfrac{5}{2}$，

得 $\begin{cases}-\dfrac{3}{2}m+\dfrac{5}{2}=\dfrac{25}{4},\\ -\dfrac{3}{2}+\dfrac{5}{2}=n,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}m=-\dfrac{5}{2},\\ n=1,\end{cases}$

∴ $m=-\dfrac{5}{2}$，$n=1$.

(2) ∵点 $A\left(-\dfrac{5}{2},\dfrac{25}{4}\right)$，$B(1,1)$ 在抛物线 $y_1=-x^2+bx+c$ 上，

∴ $\begin{cases}-\dfrac{25}{4}-\dfrac{5}{2}b+c=\dfrac{25}{4},\\ -1+b+c=1,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}b=-3,\\ c=5,\end{cases}$ ∴抛物线表达式为 $y_1=-x^2-3x+5$.

∵ $x=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{3}{2}$，

∴抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{3}{2}$.

(3) 由图象得当 $-\dfrac{5}{2}\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y_1\geqslant y_2$.

刷 易错

17. 0 或 6 【解析】∵ $-1<0$，∴二次函数 $y=-(x-h)^2+2$ 的图象开口向下，∴函数在 $x=h$ 时取得最大值 2，$x>h$ 时，y 随 x 的增大而减小，$x<h$ 时，y 随 x 的增大而增大. ①若 $h<2\leqslant x\leqslant 4$，则当 $x=2$ 时，y 取得最大值 -2，可得 $-(2-h)^2+2=-2$，解得 $h=0$ 或 $h=4$（舍去）；②若 $2\leqslant x\leqslant 4<h$，则当 $x=4$ 时，y 取得最大值 -2，可得 $-(4-h)^2+2=-2$，

解得 $h=6$ 或 $h=2$（舍去）. 综上，h 的值为 0 或 6.

易错警示

二次函数增减性的分类讨论

因为二次函数在其图象对称轴两侧的增减性是不同的，所以在计算时要分类讨论.

刷 提升

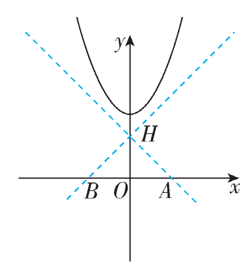
1. D 【解析】∵反比例函数 $y=\dfrac{c}{x}$ 的图象位于第二、四象限，∴ $c<0$. ∵二次函数 $y=ax^2+bx$ 的图象开口向上，对称轴在 y 轴右侧，∴ $a>0$，$-\dfrac{b}{2a}>0$，∴ $b<0$，$\dfrac{c}{a}<0$，∴ $-b>0$，∴一次函数 $y=\dfrac{c}{a}x-b$ 的图象经过第一、二、四象限，故选 D.

2. B 【解析】∵ $1>0$，∴抛物线 $y=(x-2)^2-9$ 开口向上，∴当 $x=2$ 时，y 取最小值 -9，故①符合题意；∵抛物线 $y=(x-2)^2-9$ 的对称轴为直线 $x=2$，$3-2<4-2$，∴ $y_2>y_1$，故②符合题意；将抛物线 $y=(x-2)^2-9$ 向左平移 3 个单位长度，再向上平移 4 个单位长度所得抛物线的函数表达式为 $y=(x+1)^2-5$，故③不符合题意；当 $y=0$ 时，$(x-2)^2-9=0$，解得 $x_1=5$，$x_2=-1$，$5-(-1)=6$，故④符合题意. 故选 B.

3. C 【解析】由图象开口向上，与 y 轴交于负半轴，可知 $a>0$，$c<0$，再根据“左同右异”，可知 $b>0$，则 $abc<0$，故①错误；∵二次函数 $y=ax^2+bx+c$（a,b,c 为常数，$a\neq 0$）的图象与 x 轴交于点 $A(-2,0)$，$B(1,0)$，∴该函数图象的对称轴为直线 $x=\dfrac{-2+1}{2}=-\dfrac{1}{2}$，∴当 $x<-\dfrac{1}{2}$ 时，y 随 x 的增大而减小，∴若点 $(-3,y_1)$ 和 $(-1.5,y_2)$ 均在该函数图象上，则 $y_1>y_2$，故②错误；∵当 $x=-2$ 时，$y=0$，∴ $4a-2b+c=0$，故③正确；∵该函数图象的对称轴是直线 $x=-\dfrac{1}{2}$，$a>0$，∴当 $x=-\dfrac{1}{2}$ 时，y 取得最小值，∴ $a\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+b\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+c\leqslant am^2+bm+c$（$m$ 为任意实数），∴ $\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{2}b\leqslant m(am+b)$（$m$ 为任意实数），故④错误. 故选 C.

4. A 【解析】由题意可知，“图象数”为 $[m,-2m,-3m]$ 的二次函数表达式为 $y=mx^2-2mx-3m$，∴该函数图象的对称轴为直线 $x=1$. ∵ $y_1=-3m$，∴ $mx_1{}^2-2mx_1-3m=-3m$，解得 $x_1=0$ 或 $x_1=2$，∴ $P(0,-3m)$ 或 $P(2,-3m)$. ∵ $m>0$，∴二次函数图象开口向上，∴当 $y_1>y_2$ 时，x_2 的取值范围为 $0<x_2<2$，故选 A.

5. C 【解析】如图，过点 H 作两条互相垂直的直线，分别与 x 轴交于点 A，B. ∵ $H(0,1)$ 是抛物线 $y=x^2+n$ 的“T 型点”，∴结合抛物线和等腰三角形的性质易得 $\angle AHO=45°$，∴ $OA=OH=1$，∴ $A(1,0)$，∴直线 AH 的表达式为 $y=-x+1$. ∵ $y=x^2+n$，∴当方程 $x^2+n=-x+1$ 有解时，



才满足 $H(0,1)$ 是抛物线 $y=x^2+n$ 的“T 型点”，即 $\Delta=1^2-4(n-1)\geqslant 0$，解得 $n\leqslant\dfrac{5}{4}$. 又∵点 H 是抛物线外一点，∴ $n\neq 1$，∴当 $n\leqslant\dfrac{5}{4}$ 且 $n\neq 1$ 时，$H(0,1)$ 是抛物线 $y=x^2+n$ 的“T 型点”，故选 C.

6.【解】(1) 把 $A(1,0)$，$B(-3,0)$ 代入 $y=x^2+bx+c$，得 $\begin{cases}1+b+c=0,\\ 9-3b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=2,\\ c=-3,\end{cases}$

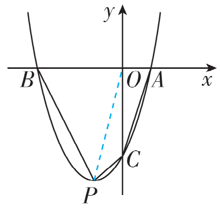
∴ 该抛物线的函数表达式为 $y=x^2+2x-3$.

(2)∵ $A(1,0)$,$B(-3,0)$,∴ $OA=1$,$OB=3$.

∵ $y=x^2+2x-3=(x+1)^2-4$,

∴ 顶点 P 的坐标为$(-1,-4)$. 当 $x=0$ 时,$y=-3$,

∴ $C(0,-3)$,∴ $OC=3$. 连接 OP,如图,



则 $S_{四边形ABPC}=S_{\triangle AOC}+S_{\triangle OCP}+S_{\triangle BOP}$

$=\frac{1}{2}OA\cdot OC+\frac{1}{2}OC\cdot(0-x_p)+\frac{1}{2}OB\cdot(0-y_p)$

$=\frac{1}{2}\times1\times3+\frac{1}{2}\times3\times1+\frac{1}{2}\times3\times4=9$.

(3)当 $x=n$ 时,记函数 $y=x^2+2x-3$ 的函数值为 y_n.

∵ $1>0$,∴ 该抛物线开口向上,且对称轴为直线 $x=-1$.

①当 $-3<n\leqslant-1$ 时,$y_{\max}=y_B=0$,$y_{\min}=y_n=n^2+2n-3$. ∵ $y_{\max}-y_{\min}=4$,即 $0-n^2-2n+3=4$,解得 $n_1=n_2=-1$,∴ $n=-1$;

②当 $-1<n<1$ 时,$y_{\max}=y_B=0$,$y_{\min}=y_P=-4$,

∴ $y_{\max}-y_{\min}=0-(-4)=4$,符合题意;

③当 $n\geqslant1$ 时,$y_{\max}=y_n=n^2+2n-3$,$y_{\min}=y_P=-4$,

∴ $y_{\max}-y_{\min}=n^2+2n-3-(-4)=(n+1)^2=4$,

解得 $n=1$ 或 $n=-3$(舍去),∴ $n=1$.

综上所述,n 的取值范围为 $-1\leqslant n\leqslant1$.

7.【解】(1)把 $B(4,0)$ 代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+2$,得 $-8+4b+2=0$,

∴ $b=\frac{3}{2}$,∴ 抛物线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$. 当 $x=0$ 时,$y=2$,

∴ 点 C 的坐标为$(0,2)$. 设直线 BC 的函数表达式为 $y=sx+t$.

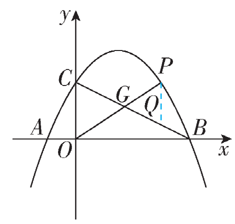
将 $C(0,2)$ 和 $B(4,0)$ 代入,得 $\begin{cases}2=t,\\0=4s+t,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}s=-\frac{1}{2},\\t=2,\end{cases}$

∴ 直线 BC 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+2$.

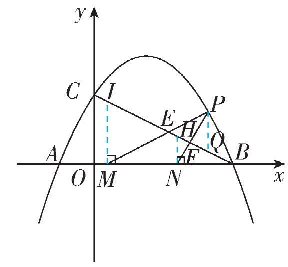
(2)如图(1),过点 P 作 $PQ/\!/y$ 轴交 BC 于点 Q.

设 $P\left(t,-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+2\right)(0<t<4)$,则 $Q\left(t,-\frac{1}{2}t+2\right)$,∴ $PQ=y_P-y_Q=-\frac{1}{2}t^2+2t$. ∵ $PQ/\!/y$ 轴,∴ $\triangle GPQ\backsim\triangle GOC$,∴ $\frac{PQ}{OC}=\frac{GP}{OG}$. ∵ $3OG=4GP$,$OC=2$,∴ $PQ=-\frac{1}{2}t^2+2t=\frac{3}{2}$,∴ $t^2-4t+3=0$,

解得 $t_1=1$,$t_2=3$,∴ 点 P 的坐标为$(1,3)$或$(3,2)$.



图(1)



图(2)

(3)如图(2),过点 M 作 $MI\perp x$ 轴交 BC 于点 I,过点 N 作 $NH\perp x$ 轴交 BC 于点 H,过点 P 作 $PQ/\!/y$ 轴交 BC 于点 Q,

∴ $MI/\!/NH/\!/PQ$,∴ $\triangle EMI\backsim\triangle EPQ$,$\triangle FNH\backsim\triangle FPQ$,∴ $\frac{ME}{EP}=\frac{MI}{PQ}$,$\frac{NF}{FP}=\frac{NH}{PQ}$,

∴ $\frac{ME}{EP}-\frac{NF}{FP}=\frac{MI-NH}{PQ}$. 设 $M(m,0)$,则 $N(m+2,0)$,把它们的横坐标分别代入 $y=-\frac{1}{2}x+2$,易得 $MI=y_I=-\frac{1}{2}m+2$,$NH=y_H=-\frac{1}{2}(m+2)+2=-\frac{1}{2}m+1$,∴ $MI-NH=1$. 设 $P\left(t,-\frac{1}{2}t^2+\frac{3}{2}t+2\right)$.

由(2)知 $PQ=y_P-y_Q=-\frac{1}{2}t^2+2t=-\frac{1}{2}(t-2)^2+2$,

∴ $0<PQ\leqslant2$,∴ $\left(\frac{ME}{EP}-\frac{NF}{FP}\right)_{\min}=\frac{1}{PQ_{\max}}=\frac{1}{2}$,即 $\frac{ME}{EP}-\frac{NF}{FP}$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$.

刷 素养

8.【解】(1)∵ 把横、纵坐标之和为 18 的点称为“乾坤点”,∴ 设“乾坤点”的坐标为(x,y),则 $x+y=18$,∴ 所有的“乾坤点”都在直线 $y=-x+18$ 上. ∵ 若某函数图象上存在“乾坤点”,则把该函数称为“乾坤函数”,

∴ “乾坤函数”的图象必定与直线 $y=-x+18$ 有交点.

①联立 $\begin{cases}y=-\frac{2\,025}{x},\\y=-x+18,\end{cases}$ 整理得 $x^2-18x-2\,025=0$,∴ $\Delta=18^2-4\times(-2\,025)=8\,424>0$,∴ 方程有两个不相等的实数根,即函数 $y=-\frac{2\,025}{x}$ 的图象与直线 $y=-x+18$ 有两个交点,∴ $y=-\frac{2\,025}{x}$ 是“乾坤函数”;

②联立 $\begin{cases}y=6x+18,\\y=-x+18,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=0,\\y=18,\end{cases}$ 即函数 $y=6x+18$ 的图象与直线 $y=-x+18$ 有一个交点,∴ $y=6x+18$ 是“乾坤函数”;

③联立 $\begin{cases}y=x^2-2x+2\,025,\\y=-x+18,\end{cases}$ 整理得 $x^2-x+2\,007=0$,∴ $\Delta=1^2-4\times2\,007=-8\,027<0$,∴ 方程无实数根,即函数 $y=x^2-2x+2\,025$ 的图象与直线 $y=-x+18$ 没有交点,∴ $y=x^2-2x+2\,025$ 不是

"乾坤函数".

故答案为①√,②√,③×.

(2)∵ 函数 $y=\frac{2a+1}{x}$(a 为常数,$2a+1\neq0$)的图象上有且只有一个"乾坤点",

∴ 函数 $y=\frac{2a+1}{x}$(a 为常数,$2a+1\neq0$)的图象与直线 $y=-x+18$ 有且只有一个交点.

联立$\begin{cases}y=\frac{2a+1}{x},\\y=-x+18,\end{cases}$整理得 $x^2-18x+2a+1=0$,

∴ 方程 $x^2-18x+2a+1=0$ 有两个相等的实数根,

∴ $\Delta=(-18)^2-4\times(2a+1)=0$,$x_1=x_2=-\frac{-18}{2}=9$,∴ $a=40$.

当 $x=9$ 时,$y=-x+18=9$,

∴ 相应的"乾坤点"的坐标为(9,9).

(3)∵ 点(x,y)关于 x 轴对称的点的坐标为$(x,-y)$,∴ 抛物线 C_1:$y=-x^2+px+p-18(p<0)$关于 x 轴对称的抛物线 C_2 的函数表达式为$-y=-x^2+px+p-18(p<0)$,即 $y=x^2-px-p+18(p<0)$.

∵ 抛物线 C_2 上有两个"乾坤点",∴ $y=x^2-px-p+18(p<0)$是"乾坤函数",且抛物线 C_2 与直线 $y=-x+18$ 有两个交点.

联立$\begin{cases}y=x^2-px-p+18,\\y=-x+18,\end{cases}$得 $x^2-(p-1)x-p=0$,整理得$(x-p)(x+1)=0$,

解得 $x_1=-1$,$x_2=p$. ∵ 当 $x=-1$ 时,$y=-x+18=19$;当 $x=p$ 时,$y=-x+18=-p+18$,

∴ 抛物线 C_2 上的两个"乾坤点"的坐标分别为$(-1,19)$,$(p,-p+18)$. ∵ 这两个"乾坤点"之间的距离为 $5\sqrt{2}$,∴ $(p+1)^2+(-p+18-19)^2=(5\sqrt{2})^2$,

解得 $p=4$ 或 $p=-6$. ∵ $p<0$,∴ $p=-6$,

∴ C_1:$y=-x^2-6x-24$. ∵ 点(x,y)绕点 $K(n,0)$旋转 180°得到点$(2n-x,-y)$,∴ 将抛物线 C_1 绕点 $K(n,0)$旋转 180°得到抛物线 C_3:$-y=-(2n-x)^2-6(2n-x)-24$,整理得 $y=(2n-x)^2+6(2n-x)+24=x^2-(4n+6)x+4n^2+12n+24$.

联立$\begin{cases}y=x^2-(4n+6)x+4n^2+12n+24,\\y=-x+18,\end{cases}$得 $x^2-(4n+5)x+4n^2+12n+6=0$,∴ $\Delta=(4n+5)^2-4(4n^2+12n+6)>0$,∴ $n<\frac{1}{8}$.

设抛物线 C_3 上的两个"乾坤点"坐标分别为$(m,-m+18)$,$(b,-b+18)$,则 $mb=4n^2+12n+6$,$m+b=4n+5$,

∴ $(m-b)^2=(m+b)^2-4mb=(4n+5)^2-4(4n^2+12n+6)=1-8n$,

∴ 抛物线 C_3 上的两个"乾坤点"之间的距离为 $\sqrt{(m-b)^2+[-m+18-(-b+18)]^2}=\sqrt{2(m-b)^2}=\sqrt{2(1-8n)}=\sqrt{2-16n}$.

专题 3 函数图象的分析与判断

刷难关

1. C 【解析】当 $a>0$ 时,一次函数 $y=ax+a$ 的图象经过第一、二、三象限,正比例函数 $y=-ax$ 的图象经过第二、四象限;当 $a<0$ 时,一次函数 $y=ax+a$ 的图象经过第二、三、四象限,正比例函数 $y=-ax$ 的图象经过第一、三象限,所以 C 选项符合题意. 故选 C.

2. A 【解析】当反比例函数图象位于第一、三象限时,$a>0$,∴ $-a<0$,∴ 一次函数 $y=a(x-1)=ax-a$ 的图象经过第一、三、四象限,故 A 选项符合题意,B 选项不合题意;当反比例函数图象位于第二、四象限时,$a<0$,∴ $-a>0$,∴ 一次函数 $y=a(x-1)=ax-a$ 的图象经过第一、二、四象限,故 C,D 选项不合题意. 故选 A.

3. D 【解析】∵ 抛物线 $y=ax^2+ax$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{a}{2a}=-\frac{1}{2}$,∴ 对称轴在 y 轴左侧,∴ A,B 选项不正确;$a<0$ 时,抛物线开口向下,一次函数 $y=ax+a$ 的图象经过第二、三、四象限,∴ C 选项不正确;$a>0$ 时,抛物线开口向上,一次函数 $y=ax+a$ 的图象经过第一、二、三象限,∴ D 选项正确. 故选 D.

4. C 【解析】由函数图象可得,小毅从巴溪洲广场匀速徒步至湘江保利时代的速度为$(25-10)\div(5-2.5)=6$(km/h),∴ 他徒步 4 h 时(含中途休整时间)的路程为 $10+6\times(4-2.5)=19$(km),∴ 他离全百终点的路程为 $100-19=81$(km),故选 C.

5. A 【解析】∵ 由图象可知 $F=100\times30=3\ 000$(N),∴ $p=\frac{3\ 000}{S}$. 当压强 p 为 40 kPa 时,有 $40=\frac{3\ 000}{S}$,此时 $S=75\ \text{m}^2$;当压强 p 为 60 kPa 时,有 $60=\frac{3\ 000}{S}$,此时 $S=50\ \text{m}^2$. ∵ $75-50=25(\text{m}^2)$,∴ 若压强 p 由 40 kPa 增大至 60 kPa,则物体受力面积 S 将减小 25 m^2,故选 A.

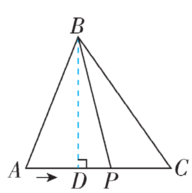
6. D 【解析】由题图(2)可知,当呼出气体中酒精浓度增大时,气敏电阻 R 的阻值减小,故选项 A 错误;根据串联电路电阻特点,可知总电阻 $R_{总}=R+R_0$,R 减小,R_0 不变,则 $R_{总}$ 减小,故选项 B 错误;由 $I=\frac{U}{R+R_0}$可知,电路中的电流 I 增大,即电流表的示数增大,故选项 C 错误;电压表测定值电阻 R_0 两端电压,即 $U_0=IR_0$,I 增大,R_0 不变,所以 U_0 增大,即电压表的示数增大,故选项 D 正确. 故选 D.

7. C 【解析】由图象可知 A、B 两城之间的距离为 600 千米,甲车行驶的时间为 10 小时,而乙车是在甲车出发 2 小时后出发的,且行驶的时间为 6 小时,即比甲车早到 2 小时,故①②都正确. 设甲车到 A 城的距离 y 与甲车行驶的时间 t 之间的

关系式为 $y_{甲}=kt$，把(10,600)代入可求得 $k=60$，∴ $y_{甲}=60t$. 当 $2\leqslant t\leqslant 8$ 时，设乙车到 A 城的距离 y 与甲车行驶的时间 t 之间的关系式为 $y_{乙}=mt+n$，把(2,0)和(8,600)代入可得 $\begin{cases}2m+n=0,\\8m+n=600,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}m=100,\\n=-200,\end{cases}$ ∴ $y_{乙}=100t-200(2\leqslant t\leqslant 8)$. 令 $y_{甲}=y_{乙}$，得 $60t=100t-200$，解得 $t=5$，此时 $t-2=3$，∴ 乙车出发 3 小时后追上甲车，故③错误. 由题意可知，当乙车出发前，甲、乙两车相距 50 千米时，$50=60t$，解得 $t=\frac{5}{6}$；当乙车出发后且未追上甲车，甲、乙两车相距 50 千米时，$60t-100t+200=50$，解得 $t=\frac{15}{4}$；当乙车追上甲车后，甲、乙两车相距 50 千米时，$100t-200-60t=50$，解得 $t=\frac{25}{4}$；当乙车到达 B 城后，甲、乙两车相距 50 千米时，$60t=550$，解得 $t=\frac{55}{6}$，∴ 甲、乙两车相距 50 千米时，甲车行驶的时间为 $\frac{5}{6}$ 小时或 $\frac{15}{4}$ 小时或 $\frac{25}{4}$ 小时或 $\frac{55}{6}$ 小时，故④错误. 综上可知，正确的结论有①②，共 2 个. 故选 C.

8. 4 【解析】∵ 抛物线 $y=ax^2+(2a+2)x+c$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{2a+2}{2a}=1$，∴ $a=-\frac{1}{2}$，∴ $y=-\frac{1}{2}x^2+x+c$. 当 $x=0$ 时，$y=c$，即喷头 A 的高度为 c 米. ∵ $OD=4$ 米，∴ $D(4,0)$. 当抛物线过点 $D(4,0)$ 时，喷头 A 的高度最大，令 $0=-\frac{1}{2}\times 4^2+4+c$，解得 $c=4$，∴ 喷头 A 的最大高度为 4 米. 故答案为 4.

9. C 【解析】如图，过点 B 作 $BD\perp AC$ 于 D. 由题意可知，当点 P 在边 AC 上时，y 的值先减小后增大，∴ 结合图象可知 $AB=AC=3$，$AD=1$，∴ $BD=\sqrt{AB^2-AD^2}=2\sqrt{2}$，$CD=AC-AD=3-1=2$，∴ $BC=\sqrt{BD^2+CD^2}=2\sqrt{3}$. 当点 P 运动到点 C 时，线段 BP 的长达到最大，∴ 点 M 的横坐标为 AC 的长，纵坐标为 BC 的长，∴ 点 M 的坐标为 $(3,2\sqrt{3})$，故选 C.



10. A 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AB=BC=CD=AD=3$，$OA=OC$，$\angle BAO=\angle BCO=\angle DAO=\angle DCO$，$\angle AOB=\angle COD=\angle AOD=\angle COB=90°$. 过点 E 作 AC 的垂线，垂足为点 M. 设 $\angle BAO=\angle BCO=\angle DAO=\angle DCO=\alpha$. ∵ $\angle AOB=\angle COD=\angle AOD=\angle COB=90°$，∴ $AO=AB\times\cos\angle BAO=3\cos\alpha=OC$. 当 $0\leqslant t<3$ 时，点 E 在 AB 上运动，$AE=t$，∴ $EM=AE\times\sin\alpha=t\sin\alpha$，∴ $y=S_{\triangle AOE}=\frac{OA\cdot EM}{2}=\frac{3\cos\alpha\cdot t\sin\alpha}{2}=\frac{3\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2}t$. ∵ $\cos\alpha\cdot\sin\alpha>0$，∴ 当 $0\leqslant t<3$ 时，y 关于 t 的函数图象从左到右为上升趋势. 当 $3\leqslant t<6$ 时，点 E 在 BC 上运动，$CE=6-t$，∴ $EM=CE\times\sin\alpha=(6-t)\sin\alpha$，∴ $y=S_{\triangle AOE}=\frac{OA\cdot EM}{2}=\frac{3\cos\alpha\cdot(6-t)\sin\alpha}{2}=-\frac{3\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{2}t+9\cos\alpha\cdot\sin\alpha$. ∵ $\cos\alpha\cdot\sin\alpha>0$，∴ 当 $3\leqslant t<6$ 时，y 关于 t 的函数图象从左到右为下降趋势. 同理可得，当 $6\leqslant t<9$ 时，y 关于 t 的函数图象从左到右为上升趋势. 当 $9\leqslant t\leqslant 12$ 时，y 关于 t 的函数图象从左到右为下降趋势，且各段图象都是直的. 故选 A.

专题 4 二次函数图象与系数的关系

刷难关

1. C 【解析】在 $y=ax^2-4ax+3a+1(a>1)$ 中，∵ $a>1$，∴ 函数图象开口向上，故 D 选项不符合题意. ∵ 函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{-4a}{2a}=2$，在 y 轴右侧，故 B 选项不符合题意. 令 $y=0$，则 $ax^2-4ax+3a+1=0$，则 $\Delta=(-4a)^2-4a(3a+1)=16a^2-12a^2-4a=4a^2-4a=4a(a-1)$. ∵ $a>1$，∴ $\Delta>0$，∴ 方程有两个不相等的实数根，即二次函数 $y=ax^2-4ax+3a+1$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点，故 A 选项不符合题意. 故选 C.

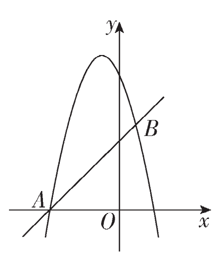
2. C 【解析】∵ 该函数图象与 y 轴负半轴相交，∴ $c<0$，故选项 A 错误，不符合题意. ∵ 该函数图象与 x 轴有两个交点，∴ $\Delta=b^2-4ac>0$，故选项 B 错误，不符合题意. ∵ 该函数图象开口向上，对称轴为直线 $x=1$，∴ $a>0$，$-\frac{b}{2a}=1$，即 $b=-2a$. ∵ 当 $x=-1$ 时，$y=a-b+c>0$，∴ $3a+c>0$，即 $4a+c>a>0$，故选项 C 正确，符合题意. ∵ 该函数图象与 x 轴的其中一个交点的横坐标在 -1 和 0 之间，∴ 当 $-1<x<3$ 时，y 有可能大于或等于 0，故选项 D 错误，不符合题意. 故选 C.

3. C 【解析】由题图可知，抛物线 $y_1=ax^2+bx+c$ 开口向下，与 y 轴交于正半轴，∴ $a<0$，$c>0$. ∵ 顶点 A 的坐标为 $(1,3)$，∴ 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$，∴ $b=-2a>0$，∴ $abc<0$，故 A 选项正确，不符合题意. ∵ 抛物线 $y_1=ax^2+bx+c$ 的顶点 A 的坐标为 $(1,3)$，∴ 直线 $y=3$ 与抛物线 $y_1=ax^2+bx+c$ 只有一个交点，即点 A，∴ 方程 $ax^2+bx+c-3=0$ 有两个相等的实数根 $x_1=x_2=1$，故 B 选项正确，不符合题意. 根据题图可得，当 $1<x<4$ 时，$y_1>y_2$，故 C 选项不正确，符合题意. ∵ 抛物线的对称轴为直线 $x=1$，与 x 轴的一个交点 B 坐标为 $(4,0)$，∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点的坐标是 $(1\times 2-4,0)$，即 $(-2,0)$，故 D 选项正确，不符合题意. 故选 C.

4. B 【解析】∵ 二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象与 x 轴相交于点 $A(-3,0)$，$B(1,0)$，∴ 对称轴是直线 $x=\frac{-3+1}{2}=-1$，∴ $-\frac{b}{2a}=-1$，∴ $b=2a$. 由图象可知，$a>0$，$c<0$，∴ $b=2a>0$，

$\therefore abc<0$,故①正确. $\because B(1,0)$在抛物线上,$\therefore a+b+c=0$. 又 $\because b=2a$,$\therefore a+2a+c=0$,$\therefore 3a+c=0$,$\therefore 3a=-c$,$\therefore 3a-c=-c-c=-2c>0$,故②错误. $\because$ 抛物线开口向上,且对称轴是直线 $x=-1$,$\therefore$ 当 $x=-1$ 时,y 取得最小值 $a-b+c$,故对于任意实数 m,当 $x=m$ 时,函数值 $y=am^2+bm+c\geqslant a-b+c$,即 $am^2+bm\geqslant a-b$,故③正确. $\because$ 抛物线开口向上,$\therefore$ 抛物线上的点离对称轴越近,函数值越小. $\because |-4-(-1)|=3>\left|\frac{1}{2}-(-1)\right|=\frac{3}{2}$,$\therefore y_1>y_2$,故④错误. 综上,正确的有 2 个,故选 B.

5. ①③④　【解析】把$(-4,0)$,$(-1,9)$,$(1,5)$代入 $y=ax^2+bx+c$,得$\begin{cases}16a-4b+c=0,\\a-b+c=9,\\a+b+c=5,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=-1,\\b=-2,\\c=8,\end{cases}$ $\therefore y=-x^2-2x+8$,$\therefore$ 该二次函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{-2}{2\times(-1)}=-1$,故①正确. $\because a=-1,b=-2,c=8$,$\therefore ax^2-bx+c-9=0$ 为 $-x^2+2x+8-9=0$,$\therefore -x^2+2x-1=0$. $\because \Delta=2^2-4\times(-1)\times(-1)=0$,$\therefore$ 方程 $ax^2-bx+c-9=0$ 有两个相等的实数根,故②错误. $\because \frac{m+(-m-2)}{2}=-1$,$\therefore$ 点(m,y_1),$(-m-2,y_2)$关于直线 $x=-1$ 对称,$\therefore y_1=y_2$,故③正确. 由 $ax^2+(b-1)x+c<4$ 得 $ax^2+bx+c<x+4$,即$-x^2-2x+8<x+4$. 画函数 $y=-x^2-2x+8$ 和 $y=x+4$ 的图象如图. 联立$\begin{cases}y=x+4,\\y=-x^2-2x+8,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x_1=-4,\\y_1=0,\end{cases}\begin{cases}x_2=1,\\y_2=5,\end{cases}$ $\therefore A(-4,0)$,$B(1,5)$. 由图可得,当 $x<-4$ 或 $x>1$ 时,$-x^2-2x+8<x+4$,即 $ax^2+(b-1)x+c<4$,故④正确. 综上,正确的结论为①③④,故答案为①③④.



6. ①③　【解析】$\because$ 抛物线的顶点坐标为$(-2,-9a)$,$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=a(x+2)^2-9a=ax^2+4ax-5a$,$\therefore b=4a,c=-5a$. $\because$ 抛物线开口向上,$\therefore a>0$,$\therefore 4a+2b+c=4a+8a-5a=7a>0$,$5a-b+c=5a-4a-5a=-4a<0$,故①正确,②错误. 当 $y=0$ 时,$ax^2+4ax-5a=0$,解得 $x=-5$ 或 $x=1$,$\therefore$ 抛物线与 x 轴的交点坐标为$(-5,0)$,$(1,0)$. $\because$ 方程 $a(x+5)(x-1)=-1$ 有两个根 x_1 和 x_2,且 $x_1<x_2$,$\therefore$ 抛物线 $y=a(x+5)(x-1)=ax^2+4ax-5a$ 与直线 $y=-1$ 有两个交点,交点的横坐标分别为 x_1 和 x_2,$\therefore -5<x_1<x_2<1$,故③正确. $\because$ 方程$|ax^2+bx+c|=1$ 有四个根,$\therefore$ 方程 $ax^2+bx+c=1$ 有两个根,方程 $ax^2+bx+c=-1$ 有两个根,$\therefore$ 所有根之和为 $2\times\left(-\frac{b}{a}\right)=2\times\left(-\frac{4a}{a}\right)=-8$,故④错误. 故答案为①③.

考点 16　二次函数的实际应用

刷提升

1.【解】(1)由题意得 $S=AB\cdot BC=x(28-x)=-x^2+28x$.

(2)由题意得 $x(28-x)=192$,整理得 $x^2-28x+192=0$,解得 $x_1=12,x_2=16$,

$\therefore x$ 的值为 12 或 16.

(3)由题意得$\begin{cases}x\geqslant 6,\\28-x\geqslant 15,\end{cases}$ 解得 $6\leqslant x\leqslant 13$. $\because S=-x^2+28x=-(x-14)^2+196$.

$\because a=-1<0$,$\therefore$ 当 $x<14$ 时,S 随 x 的增大而增大,$\therefore$ 当 $x=13$ 时,$S_{最大}=195$,

$\therefore$ 矩形花园 $ABCD$ 的面积的最大值为 195 m^2.

2.【解】(1)已知每份特色菜的售价上涨 x 元,则平均每天可卖出$(100-2x)$份. 根据题意得$(100-2x)(60+x-40)=2\ 400$,解得 $x_1=10,x_2=20$(不合题意,舍去).

答:当每份特色菜的售价上涨 10 元时,这家特色菜馆才能实现每天的销售利润为 2 400 元.

(2)已知每份特色菜的售价上涨 x 元,每天的销售利润为 y 元,则 $y=(100-2x)(60+x-40)=-2(x-15)^2+2\ 450$. $\because a=-2<0$,$\therefore$ 当 $x=15$ 时,y 有最大值,最大值为 2 450,此时每份特色菜的售价为 $60+15=75$(元),符合题意.

答:每份特色菜的售价定为 75 元时,每天的销售利润最大,最大销售利润是 2 450 元.

3.【解】(1)根据题意得,当 $x=800$ 时,$y=800\times(50-30)=800\times20=16\ 000$,则一次性销售利润为 16 000 元.

(2)当 $1\ 000\leqslant x\leqslant 1\ 750$ 时,

每千克销售利润为 $50-30-0.01(x-1\ 000)=(-0.01x+30)$元,

$\therefore y=x(-0.01x+30)=-0.01x^2+30x$

$=-0.01(x^2-3\ 000x)=-0.01(x-1\ 500)^2+22\ 500$.

$\because -0.01<0$,$1\ 000\leqslant x\leqslant 1\ 750$,

$\therefore$ 当 $x=1\ 500$ 时,y 有最大值,最大值为 22 500,$\therefore$ 当 $1\ 000\leqslant x\leqslant 1\ 750$ 时,一次性销售利润的最大值为 22 500 元.

4.【解】(1)由题意得抛物线的顶点坐标为$\left(\frac{9}{2},3\right)$,

$\therefore$ 可设函数表达式为 $y=a\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+3(a\neq0)$.

$\because$ 抛物线过点$(0,1.65)$,$\therefore 1.65=a\left(0-\frac{9}{2}\right)^2+3$,

解得 $a=-\frac{1}{15}$,

$\therefore y$ 关于 x 的函数表达式为 $y=-\frac{1}{15}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+3$.

(2)令 $y=0$,即$-\frac{1}{15}\left(x-\frac{9}{2}\right)^2+3=0$,

解得 $x_1=\frac{9}{2}+3\sqrt{5}$，$x_2=\frac{9}{2}-3\sqrt{5}$（不合题意，舍去）.

$\because \frac{9}{2}+3\sqrt{5}\approx 11.208>11$，

$\therefore$ 该男生此次投实心球得满分.

刷 素养

5.【解】（1）由题设抛物线 C_1 的表达式为 $y=a(x-2.5)^2+4$. 把 $B(0.5,0)$ 代入，得 $0=a\times(0.5-2.5)^2+4$，解得 $a=-1$，

$\therefore$ 抛物线 C_1 的表达式为 $y=-(x-2.5)^2+4$.

当 $y=0$ 时，$0=-(x-2.5)^2+4$，解得 $x_1=0.5$，$x_2=4.5$，

$\therefore D(4.5,0)$.

（2）①由题设抛物线 C_2 的表达式为 $y=-(x-6)^2+k$.

把 $D(4.5,0)$ 代入，得 $0=-(4.5-6)^2+k$，解得 $k=2.25$，

$\therefore y=-(x-6)^2+2.25$，

$\therefore$ 抛物线 C_1 与 C_2 最高点的高度差为 $4-2.25=1.75$（m）.

② $0.1\leqslant n\leqslant 0.2$.

设平移后弹力球再次弹起的抛物线 C_2 的表达式为 $y=-(x-6-n)^2+2.25$. 当该抛物线经过点 $(7.6,0)$ 时，$0=-(7.6-6-n)^2+2.25$，解得 $n_1=0.1$，$n_2=3.1$（舍去）.

当该抛物线经过点 $(7.6,0.29)$ 时，$0.29=-(7.6-6-n)^2+2.25$，解得 $n_1=0.2$，$n_2=3$（舍去）.

$\therefore n$ 的取值范围为 $0.1\leqslant n\leqslant 0.2$.

专题 5 二次函数的综合应用

刷 难关

1.【解】（1）当 $a=1$ 时，抛物线的函数表达式为 $y=x^2+(b-2)x+\frac{b^2}{4}$.

①由抛物线的函数表达式得，该抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{2-b}{2}$，当 $x=\frac{2-b}{2}$ 时，$y=b-1$，故顶点坐标为 $\left(\frac{2-b}{2},b-1\right)$.

② $\because$ 该抛物线与 x 轴有两个不同的交点，

$\therefore \Delta=(b-2)^2-4\times\frac{b^2}{4}=(b-2)^2-b^2=-4b+4>0$，$\therefore b<1$. 又 $\because b$ 为自然数，$\therefore b=0$，$\therefore x_2-x_1=\frac{2\sqrt{-4b+4}}{2}=\sqrt{4}=2$.

（2）把 $A(0,2-m)$ 和 $B(2,n)$ 分别代入 $y=ax+m$，可得 $m=1$，$n=2a+1$，

$\therefore A(0,1)$，$B(2,2a+1)$. 把 $A(0,1)$，$B(2,2a+1)$ 代入 $y=ax^2+(b-2)x+\frac{b^2}{4}$，得 $\begin{cases}\frac{b^2}{4}=1,\\ 4a+2(b-2)+\frac{b^2}{4}=2a+1.\end{cases}$ $\because b<0$，$\therefore a=4$，$b=-2$，$\therefore$ 抛物线的函数表达式为 $y=4x^2-4x+1$，$\therefore$ 该抛物线开口向上，对称轴为直线 $x=\frac{1}{2}$.

①当 $t\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=4t^2-4t+1$；

②当 $t+1\leqslant\frac{1}{2}$，即 $t\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=4(t+1)^2-4(t+1)+1=4t^2+4t+1$；

③当 $t<\frac{1}{2}<t+1$，即 $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=4\times\left(\frac{1}{2}\right)^2-4\times\frac{1}{2}+1=0$.

综上所述，当 $t\geqslant\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=4t^2-4t+1$；当 $t\leqslant-\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=4t^2+4t+1$；当 $-\frac{1}{2}<t<\frac{1}{2}$ 时，$y_{\min}=0$.

2.【解】（1）把 $A(-4,0)$，$B(1,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+4$，

得 $\begin{cases}16a-4b+4=0,\\ a+b+4=0,\end{cases}$

解得 $\begin{cases}a=-1,\\ b=-3,\end{cases}$ $\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-x^2-3x+4$.

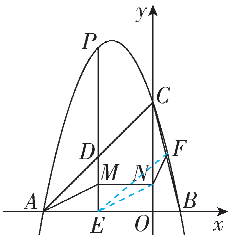
（2）在 $y=-x^2-3x+4$ 中，当 $x=0$ 时，$y=4$，$\therefore C(0,4)$. 设 AC 所在直线的表达式为 $y=mx+n$. 将 $A(-4,0)$，$C(0,4)$ 代入，得 $\begin{cases}-4m+n=0,\\ n=4,\end{cases}$ $\therefore \begin{cases}m=1,\\ n=4,\end{cases}$

$\therefore AC$ 所在直线的表达式为 $y=x+4$. 设 $P(p,-p^2-3p+4)(-4<p<0)$，则 $D(p,p+4)$，$\therefore PD=-p^2-3p+4-(p+4)=-(p+2)^2+4$.

$\because -1<0$，$\therefore$ 当 $p=-2$ 时，PD 有最大值，此时 $P(-2,6)$，

$\therefore E(-2,0)$，

$\therefore AE=2$，$OE=2$. 易得四边形 $MEON$ 为矩形，$\therefore MN=OE=AE=2$. 如图所示，连接 EN，EF.



$\because AE/\!/MN$，$\therefore$ 四边形 $AMNE$ 是平行四边形，$\therefore AM=EN$，

$\therefore AM+MN+NF=EN+MN+NF\geqslant MN+EF$，

$\therefore$ 当 E，N，F 三点共线时，$EN+NF$ 取得最小值，即 $AM+MN+NF$ 取得最小值. $\because$ 点 F 为线段 BC 的中点，

$\therefore F\left(\frac{1}{2},2\right)$，$\therefore EF=\sqrt{\left(-2-\frac{1}{2}\right)^2+2^2}=\frac{\sqrt{41}}{2}$，

$\therefore AM+MN+NF$ 的最小值为 $\frac{\sqrt{41}}{2}+2$.

（3）由（2）得当线段 PD 的长度取得最大值时，点 D 的坐标为 $(-2,2)$.

$\because$ 将该抛物线沿射线 CA 方向平移得到一个新抛物线，且 $OA=4$，$OC=4$，$\therefore$ 可设新抛物线由抛物线 $y=-x^2-3x+4$ 先向左平移 t 个单位长度，再向下平移 t 个单位长度得到，$\therefore$ 新抛物线的表达式为 $y=-(x+t)^2-3(x+t)+4-t$. $\because$ 新抛物线经过点 D，$\therefore 2=-(-2+t)^2-3(-2+t)+4-t$，

解得 $t=2$ 或 $t=-2$(舍去),∴ 新抛物线的表达式为 $y=-(x+2)^2-3(x+2)+4-2=-x^2-7x-8$.

联立$\begin{cases}y=-x^2-7x-8,\\y=x+4,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-6,\\y=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=-2,\\y=2,\end{cases}$

∴ $K(-6,-2)$. 易得 BC 所在直线的表达式为 $y=-4x+4$,当 $\angle QKD+\angle ACB=180°$时,分以下两种情况讨论:①当点 Q 在 AC 下方时,∵ $\angle QKD+\angle ACB=180°$,∴ $QK//BC$,

∴ 可设 QK 所在直线的表达式为 $y=-4x+q$,

∴ $-2=-4\times(-6)+q$,∴ $q=-26$,

∴ QK 所在直线的表达式为 $y=-4x-26$.

联立$\begin{cases}y=-x^2-7x-8,\\y=-4x-26,\end{cases}$解得$\begin{cases}x=-6,\\y=-2\end{cases}$或$\begin{cases}x=3,\\y=-38,\end{cases}$

∴ $Q(3,-38)$.

②当点 Q 在 AC 上方时,∵ $OA=OC=4$,$OB=1$,

∴ $\angle ACO=45°$,$\angle BCO<\angle OBC$,∴ $\angle BCO<45°$,

∴ $\angle ACB<90°$. ∵ $\angle QKD+\angle ACB=180°$,

∴ $\angle QKD>90°$. ∵ 当点 Q 在 AC 上方时,易知$\angle QKD<90°$,故此种情况不存在.

综上所述,点 Q 的坐标为 $(3,-38)$.

3.【解】(1)①∵ $a=1$,$x=-\frac{b}{2a}=-\frac{b}{2}=1$,

∴ $b=-2$.

②∵ 该抛物线与 y 轴相交于点 $C(0,-3)$,

∴ $c=-3$,∴ 该抛物线的表达式为 $y=x^2-2x-3$. 当 $y=0$ 时,$x^2-2x-3=0$,

解得 $x_1=-1$,$x_2=3$,∴ $AB=3-(-1)=4$.

(2)当 $a>0$ 时,∵ 对称轴为直线 $x=-\frac{b}{2a}=1$,$-1\leqslant x\leqslant 4$,$4-1>1-(-1)$,

∴ $b=-2a$,当 $x=4$ 时,函数有最大值,最大值为 $16a-8a+c=8a+c$,当 $x=1$ 时,函数有最小值,最小值为 $a-2a+c=c-a$. 由题意得 $8a+c-(c-a)=9a=3$,∴ $a=\frac{1}{3}$;

当 $a<0$ 时,∵ 对称轴为直线 $x=1$,$-1\leqslant x\leqslant 4$,

$4-1>1-(-1)$,∴ 当 $x=4$ 时,函数有最小值,最小值为 $16a-8a+c=8a+c$,当 $x=1$ 时,函数有最大值,最大值为 $a-2a+c=c-a$. 由题意得 $c-a-(8a+c)=-9a=3$,∴ $a=-\frac{1}{3}$.

综上,$a=\pm\frac{1}{3}$.

(3)当 $a=-1$ 时,抛物线的表达式为 $y=-x^2+2x+c$.

∵ $M(-2,3)$,$N(3,3)$,∴ 直线 MN 的表达式为 $y=3$.

当抛物线与线段 MN 有且只有一个公共点时,分以下两种情况讨论:

①当抛物线与直线 MN 有且只有一个公共点,且这个公共点在线段 MN 上时,方程$-x^2+2x+c=3$ 有两个相等的实根,

∴ $\Delta=4-4\times(-1)\times(c-3)=0$,∴ $c=2$,此时方程的解为 $x_1=x_2=1$,符合题意;

②当抛物线与直线 MN 有两个不同的公共点,且其中一个公共点在线段 MN 上时,$-x^2+2x+c=3$ 有两个不相等的实根,由题意得$\begin{cases}-(-2)^2+2\times(-2)+c\leqslant 3,\\-3^2+2\times 3+c>3,\\4-4\times(-1)\times(c-3)>0,\end{cases}$

解得 $6<c\leqslant 11$. 综上可知,当 $c=2$ 或 $6<c\leqslant 11$ 时,抛物线与线段 MN 有且只有一个公共点.

4.【解】(1)甲同学说法正确. 理由如下:

∵ 二次函数的表达式为 $y=ax^2-2ax+a-1(a\neq 0)$,

∴ 该函数图象的对称轴为直线 $x=-\frac{-2a}{2a}=1$,∴ 当 $x=0$ 和 $x=2$ 时,函数值相等.

(2)在 $y=ax^2-2ax+a-1(a\neq 0)$ 中,当 $x=1$ 时,$y=a-2a+a-1=-1$,∴ 顶点坐标为 $(1,-1)$. ∵ 该函数图象上到 x 轴的距离为 1 的点有三个,∴ 纵坐标的绝对值为 1 的点有三个,∴ 该函数图象开口一定向上,且纵坐标为 1 的点有两个. ∵ 以到 x 轴的距离为 1 的三个点为顶点的三角形的面积为 3,∴ 纵坐标为 1 的两个点之间的距离为$\frac{3\times 2}{1-(-1)}=3$,∴ 纵坐标为 1 的两个点到对称轴的距离都为$\frac{3}{2}$,

∴ 这两个点的坐标分别为 $\left(1-\frac{3}{2},1\right)$,$\left(1+\frac{3}{2},1\right)$,即点 $\left(-\frac{1}{2},1\right)$,$\left(\frac{5}{2},1\right)$ 在该函数图象上,

∴ $1=\frac{25}{4}a-5a+a-1$,∴ $a=\frac{8}{9}$.

(3)∵ $a>0$,对称轴为直线 $x=1$,∴ 离对称轴越远,函数值越大. ∵ $3-1=2>1-0=1$,且当 $x=3$ 时,$y=9a-6a+a-1=4a-1$,

∴ 当 $0<x<3$ 时,$-1\leqslant y<4a-1$.

∵ 当 $0<x<3$ 时,y 的取值范围中恰有四个不同的整数值,

∴ $2<4a-1\leqslant 3$,∴ $\frac{3}{4}<a\leqslant 1$.

5.【解】(1)设直线 $y=x-1$ 上的"$-\frac{1}{2}$倍点"的坐标为 (x,y). 根据"t 倍点"的定义得,$y=-\frac{1}{2}x$. ∵ 点 (x,y) 在直线 $y=x-1$ 上,

∴ $-\frac{1}{2}x=x-1$,解得 $x=\frac{2}{3}$,

∴ $y=-\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=-\frac{1}{3}$,∴ 直线 $y=x-1$ 上的"$-\frac{1}{2}$倍点"的坐标为$\left(\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$.

(2)∵ 点 $P(x_1,y_1)$,$Q(x_2,y_2)$ 是抛物线 $y=ax^2+(2b+1)x+c$

上的两个"1 倍点",

$\therefore y_1=x_1, y_2=x_2$,即 x_1,x_2 是方程 $x=ax^2+(2b+1)x+c$ 的两个根,方程整理得 $ax^2+2bx+c=0$. 由根与系数的关系得 $x_1+x_2=-\frac{2b}{a}, x_1x_2=\frac{c}{a}$,

$\therefore d=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2}=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=2\sqrt{\frac{b^2-ac}{a^2}}$.

$\because a+b+c=0, \therefore b=-a-c$,

$\therefore d=2\sqrt{\frac{(-a-c)^2-ac}{a^2}}=2\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2+\frac{c}{a}+1}$.

令 $s=\frac{c}{a}$, $\therefore d=2\sqrt{s^2+s+1}$. $\because a>b>c, a+b+c=0, \therefore a>0, a>-a-c>c$,

$\therefore -2<\frac{c}{a}<-\frac{1}{2}$,即 $-2<s<-\frac{1}{2}$.

$\because d=2\sqrt{s^2+s+1}=2\sqrt{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$.

当 $s=-\frac{1}{2}$ 时, $d=2\sqrt{\frac{3}{4}}=\sqrt{3}$,

当 $s=-2$ 时, $d=2\sqrt{3}$, $\therefore$ 根据二次函数的性质可得 $\sqrt{3}<d<2\sqrt{3}$.

(3) 由题意得"-2 倍点"在直线 $y=-2x$ 上. 联立 $\begin{cases} y=x^2-2x-1, \\ y=-2x, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=-1, \\ y=2 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=1, \\ y=-2, \end{cases}$ $\therefore$ 直线 $y=-2x$ 与抛物线 $y=x^2-2x-1$ 的交点坐标为 $(-1,2),(1,-2)$. $\because y=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$,

$\therefore$ 抛物线的顶点坐标为 $(1,-2)$,设"-2 倍点" (x,y) 关于直线 $y=n$ 的对称点为 (x,y'), $\therefore \frac{y+y'}{2}=n$,

$\therefore y'=2n-y=2n-x^2+2x+1$.

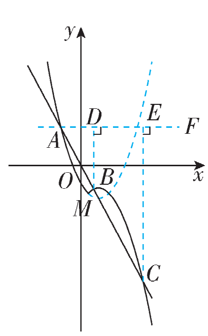
①当 $m\leqslant -1$ 时, $-2x=2n-x^2+2x+1$ 最多有两个实数根, $\therefore$ 图象 N 最多有两个"-2 倍点",不可能存在三个"-2 倍点".

②当 $-1<m<1$ 时,易得 $A(-1,2)$. $\because -2x=2n-x^2+2x+1$,

$\therefore x=2\pm\sqrt{2n+5}$. $\because x_1<x_2<x_3$,

$\therefore x_2=2-\sqrt{2n+5}, x_3=2+\sqrt{2n+5}$.

如图,过点 A 作 $AF/\!/x$ 轴,过点 B 作 $BD\perp AF$ 于点 D,过点 C 作 $CE\perp AF$ 于点 E,



$\therefore BD/\!/CE, D(2-\sqrt{2n+5},2), E(2+\sqrt{2n+5},2)$, $\therefore \triangle ABD\backsim\triangle ACE$.

$\because 2AC=5AB$, $\therefore \frac{AD}{AE}=\frac{AB}{AC}=\frac{2}{5}$,

$\therefore \frac{2-\sqrt{2n+5}+1}{2+\sqrt{2n+5}+1}=\frac{2}{5}$,解得 $n=-\frac{82}{49}$,经检验, $n=-\frac{82}{49}$ 是原方程的解, $\therefore m^2-2m-1=-\frac{82}{49}$,解得 $m=\frac{11}{7}$(舍去)或 $m=\frac{3}{7}$.

综上所述, m 的值为 $\frac{3}{7}$.

专题 6 二次函数与几何综合

刷难关

1.【解】(1)①由互为"携手共进"的抛物线的定义可得 $C_1: y_1=-2(x-2)^2+2\ 025$ 的"携手共进"抛物线一定经过点 $(2, 2\ 025)$,故答案为√.

②$\because$ 抛物线 $C_1: y_1=-(x-1)^2+2$ 的顶点 $(1,2)$ 在抛物线 $C_2: y_2=2x^2+4x-4$ 上,而抛物线 $C_2: y_2=2x^2+4x-4$ 的顶点 $(-1,-6)$ 不在抛物线 C_1 上,故 C_1 与 C_2 不是"携手共进"的抛物线,故答案为×.

③设顶点不同的两条抛物线的表达式分别为 $C_1: y=a_1(x-m)^2+n$ 和 $C_2: y=a_2(x-p)^2+q$,且两条抛物线互为"携手共进"的抛物线,则 $\begin{cases} q=a_1(p-m)^2+n, \\ n=a_2(m-p)^2+q, \end{cases}$ 两式相加可得 $(a_1+a_2)(m-p)^2=0$. $\because m\neq p, \therefore a_1+a_2=0$, $\therefore$ 二次项系数一定是互为相反数的,故答案为√.

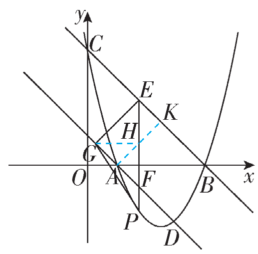
(2)$\because$ 抛物线 $C_1: y=mx^2-2mx+2n=m(x-1)^2+2n-m$, $\therefore C_1$ 的顶点坐标为 $(1,2n-m)$. $\because$ 抛物线 $C_1: y=mx^2-2mx+2n$ (m,n 为实数且 $m>0$) 与 $C_2: y=-mx^2+4nx-2m$ 互为"携手共进"的抛物线, $\therefore$ 点 $(1,2n-m)$ 在抛物线 C_2 上, $\therefore 2n-m=-m+4n-2m$,整理可得 $n=m$. 当 $\frac{m}{3n}\leqslant x\leqslant\frac{m+n}{5n}$ 时,抛物线 C_2 最低点的纵坐标为 -2,即当 $\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant\frac{2}{5}$ 时,抛物线 C_2 最低点的纵坐标为 -2. $\because -m<0$, $\therefore$ 抛物线 C_2 开口向下. $\because$ 抛物线 C_2 对称轴为直线 $x=-\frac{4n}{-2m}=2$, $\therefore x=\frac{1}{3}$ 时, $y=\frac{-7m}{9}=-2$,故 $m=\frac{18}{7}$.

(3)是定值. $\because y=x^2+2bx+c=(x+b)^2+c-b^2$, $y=-x^2+2cx+b=-(x-c)^2+b+c^2$, $\therefore C_3$ 的顶点为 $A(-b,c-b^2)$, C_4 的顶点为 $B(c,b+c^2)$. $\because$ 抛物线 $C_3: y=x^2+2bx+c$ 与 x 轴交于点 M,N, $\therefore MN=\sqrt{(2b)^2-4c}$,同理可得 $PQ=\sqrt{(2c)^2+4b}$. $\because MN=PQ$, $\therefore \sqrt{(2b)^2-4c}=\sqrt{(2c)^2+4b}$,整理得 $(b+c)(b-c-1)=0$. $\because$ 顶点互不重合, $\therefore -b\neq c$,即 $b+c\neq 0$, $\therefore b-c-1=0$,即 $b=c+1$. ① $\because$ 抛物线 C_3 与 C_4 互为"携手共进"的抛物线, $\therefore$ 点 $A(-b,c-b^2)$ 在抛物线 C_4 上, $\therefore c-b^2=-(-b-c)^2+b+c^2$,整理可得 $2bc+c-b=0$. ② 把①代入②,得 $2c(c+1)+c-(c+1)=0$,即 $c^2+c=\frac{1}{2}$. ③ $AB=\sqrt{(-b-c)^2+(c-b^2-b-c^2)^2}=\sqrt{(-2c-1)^2+(-2c^2-2c-2)^2}=\sqrt{4(c^2+c)+1+[-2(c^2+c)-2]^2}$,④

把③代入④,得 $AB=\sqrt{4\times\frac{1}{2}+1+\left(-2\times\frac{1}{2}-2\right)^2}=2\sqrt{3}$, $\therefore$ 线段 AB 的长为 $2\sqrt{3}$.

2.【解】(1)把 $A(1,0)$,$B(4,0)$代入 $y=x^2+bx+c$ 得 $\begin{cases}1+b+c=0,\\16+4b+c=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=-5,\\c=4,\end{cases}$ ∴ 抛物线的表达式为 $y=x^2-5x+4$.

(2)过 A 作 $AK\perp BC$ 于 K,过 G 作 $GH\perp PE$ 于 H,如图(1). 设 $P(p,p^2-5p+4)$. ∵ $B(4,0)$,$C(0,4)$,∴ $OB=OC=4$,易得直线 BC 表达式为 $y=-x+4$,∴ $\angle OCB=\angle OBC=45°$,$E(p,-p+4)$,∴ $\triangle AKB$ 是等腰直角三角形,



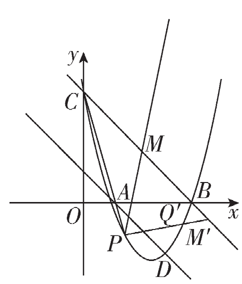
图(1)

$PE=-p+4-(p^2-5p+4)=-p^2+4p$,∴ $AK=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\frac{4-1}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

∵ $AD/\!/BC$,$EG\perp AD$,$AK\perp BC$,∴ 易得直线 AD 的表达式为 $y=-x+1$,四边形 $AKEG$ 是矩形,∴ $GE=AK=\frac{3\sqrt{2}}{2}$,$\angle GEB=90°$. ∵ $\angle PEB=\angle OCB=45°$,∴ $\angle GEP=45°$,∴ $\triangle GEH$ 是等腰直角三角形,∴ $GH=\frac{GE}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}$,∴ $S_{\triangle PEG}=\frac{1}{2}GH\cdot PE=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}(-p^2+4p)=-\frac{3}{4}(p-2)^2+3$. 联立 $\begin{cases}y=-x+1,\\y=x^2-5x+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=3,\\y=-2,\end{cases}$ ∴ $D(3,-2)$,∴ $1<p<3$. ∵ $-\frac{3}{4}<0$,∴ 当 $p=2$ 时,$S_{\triangle PEG}$ 取得最大值 3,此时 $P(2,-2)$. ∴ $\triangle PEG$ 面积的最大值为 3,此时点 P 的坐标为$(2,-2)$.

(3)在抛物线上存在点 Q,使得 $\angle PMB=2\angle PCB$,其中 M 为直线 PQ 与直线 BC 的交点.

当 M 在 B 上方时,如图(2)(简略图,点 Q 未画出). ∵ $\angle PMB=\angle PCB+\angle CPM$,$\angle PMB=2\angle PCB$,∴ $\angle PCB=\angle CPM$,∴ $CM=PM$. 设 $M(m,-m+4)$. ∵ $P(2,-2)$,$C(0,4)$,∴ $\sqrt{m^2+(-m+4-4)^2}=\sqrt{(m-2)^2+(-m+4+2)^2}$,解得 $m=\frac{5}{2}$,∴ $M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$. 由 $M\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$,



图(2)

$P(2,-2)$得直线 PQ 表达式为 $y=7x-16$,联立 $\begin{cases}y=7x-16,\\y=x^2-5x+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=10,\\y=54,\end{cases}$ ∴ $Q(10,54)$. 当 M' 在 B 下方时,∵ $\angle PMB=2\angle PCB=\angle PM'B$,∴ $PM=PM'$. 设 $M'(m',-m'+4)$,∴ $\sqrt{\left(2-\frac{5}{2}\right)^2+\left(-2-\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{(m'-2)^2+(-m'+4+2)^2}$,解得 $m'=\frac{5}{2}$(舍去)或 $m'=\frac{11}{2}$,∴ $M'\left(\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$. 由 $M'\left(\frac{11}{2},-\frac{3}{2}\right)$,$P(2,-2)$得直线 PQ'表达式为 $y=\frac{1}{7}x-\frac{16}{7}$,联立 $\begin{cases}y=\frac{1}{7}x-\frac{16}{7},\\y=x^2-5x+4,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=2,\\y=-2\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\frac{22}{7},\\y=-\frac{90}{49},\end{cases}$ ∴ $Q'\left(\frac{22}{7},-\frac{90}{49}\right)$. 综上所述,点 Q 的坐标为$(10,54)$或$\left(\frac{22}{7},-\frac{90}{49}\right)$.

3.【解】(1)∵ $OB=OC=3OA$,∴ $AB=OA+OB=4OA$,

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot OC=6OA^2=6$,∴ $OA=1$,

∴ $A(-1,0)$,$B(3,0)$,$C(0,-3)$,

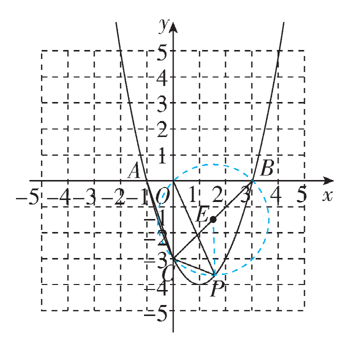
∴ 设抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$. 把 $C(0,-3)$代入,得$-3=a(0+1)(0-3)$,

∴ $a=1$,∴ 抛物线的表达式为 $y=(x+1)(x-3)=x^2-2x-3$.

(2)①∵ $OB=OC$,∴ $\angle OBC=\angle OCB=45°$.

∵ $\angle OPC=45°=\angle OBC$,∴ 当点 P 与点 B 重合时,符合题意,此时 $P(3,0)$. 当点 P 不与点 B 重合时,O,C,B,P 四点共圆,如图(1).

∵ $\angle BOC=90°$,∴ BC 为圆的直径,取 BC 的中点 E,则点 E 即为圆心,连接 EP,则易得 $EP=\frac{1}{2}BC$.



图(1)

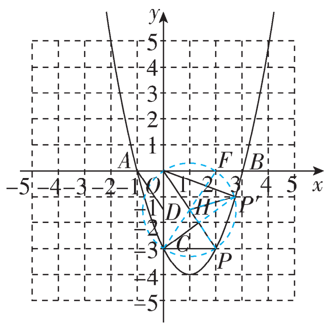
∵ $B(3,0)$,$C(0,-3)$,∴ $BC=3\sqrt{2}$,$E\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right)$,∴ $EP=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

设点 $P(m,m^2-2m-3)(m>0)$,则$\left(\frac{3}{2}-m\right)^2+\left(-\frac{3}{2}-m^2+2m+3\right)^2=\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2$,整理得 $m(m^2-m-1)(m-3)=0$,解得 $m=0$(舍去)或 $m=3$(舍去)或 $m=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$(舍去)或 $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,

当 $m=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$时,$m^2-2m-3=\frac{-5-\sqrt{5}}{2}$,∴ $P\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)$. 综上可知,$P(3,0)$或 $P\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},\frac{-5-\sqrt{5}}{2}\right)$.

②$\because C(0,-3)$，D 为 OC 的中点，$\therefore OD=\frac{1}{2}OC=\frac{3}{2}$. $\because OA=1$，

$\therefore \tan\angle OAD=\frac{OD}{OA}=\frac{3}{2}$. 取点 $F(2,0)$，连接 CF，如图(2)，则 $OF=2$，$\therefore \tan\angle OFC=\frac{OC}{OF}=\frac{3}{2}$，$\therefore \angle OFC=\angle OAD$. $\because \angle OPC=\angle OAD$，$\therefore \angle OPC=\angle OFC$，$\therefore O$，$P$，$F$，$C$ 四点共圆. $\because \angle COF=90°$，$\therefore CF$ 为圆的直径，取 CF 的中点 H，连接 PH，则 $PH=\frac{1}{2}CF$，$H\left(1,-\frac{3}{2}\right)$. $\because CF=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$，$\therefore HP=\frac{\sqrt{13}}{2}$. 设 $P(n,n^2-2n-3)(n>0)$，



图(2)

$\therefore (1-n)^2+\left(-\frac{3}{2}-n^2+2n+3\right)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2$，化简，得 $n^4-4n^3+2n^2+4n=n(n^2-2n-2)(n-2)=0$，

解得 $n=0$（舍去）或 $n=2$ 或 $n=1-\sqrt{3}$（舍去）或 $n=1+\sqrt{3}$，

$\therefore P(2,-3)$ 或 $P(1+\sqrt{3},-1)$.

4.【解】(1) 把点 A，C 的坐标代入 $y=ax^2-2ax+c$，

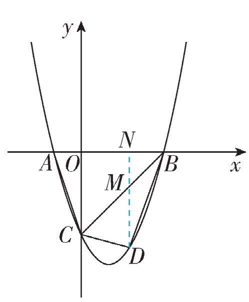
得$\begin{cases}a+2a+c=0,\\c=-3,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=1,\\c=-3,\end{cases}$ $\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-2x-3$.

(2) $\because$ 点 C 的坐标为 $(0,-3)$，$\therefore OC=3$. 如图(1)，过点 D 作 $DN/\!/y$ 轴，分别交线段 BC 和 x 轴于点 M，N.

$\because$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-2x-3$，

$\therefore$ 当 $y=0$ 时，$x^2-2x-3=0$，解得 $x=3$ 或 $x=-1$，$\therefore B(3,0)$，$\therefore OB=3$，$AB=4$，



图(1)

$\therefore S_{四边形ABDC}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}AB\times OC+\frac{1}{2}\times DM\times(BN+ON)=\frac{1}{2}\times4\times3+\frac{1}{2}\times DM\times OB=6+\frac{3}{2}DM$.

设直线 BC 的表达式为 $y=kx+b(k\neq0)$.

$\because B(3,0)$，$C(0,-3)$，$\therefore \begin{cases}3k+b=0,\\b=-3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}k=1,\\b=-3,\end{cases}$ 故直线 BC 的表达式为 $y=x-3$.

设 $D(x,x^2-2x-3)$，则 $M(x,x-3)$，

$\therefore DM=x-3-(x^2-2x-3)=-\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$.

$\because -1<0$，$0<x<3$，$\therefore$ 当 $x=\frac{3}{2}$ 时，DM 取得最大值 $\frac{9}{4}$，此时四边形 $ABDC$ 的面积取得最大值，最大值为 $6+\frac{3}{2}\times\frac{9}{4}=\frac{75}{8}$.

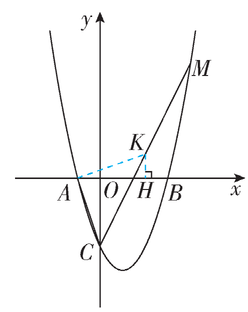
(3) 如图(2)，过 A 作 $AK\perp AC$ 交 CM 于点 K，作 $KH\perp x$ 轴于点 H.

$\because \angle ACM=45°$，$\therefore AC=AK$.

$\because \angle AOC=\angle KHA=90°$，$\angle ACO=90°-\angle OAC=\angle KAH$，

$\therefore \triangle OAC\cong\triangle HKA(\mathrm{AAS})$，$\therefore AH=CO=3$，$KH=OA=1$，$\therefore OH=2$，

$\therefore K(2,1)$.



图(2)

设 CM 所在直线的表达式为 $y=k'x-3$.

将 $K(2,1)$ 代入，得 $2k'-3=1$，$\therefore k'=2$，$\therefore CM$ 所在直线的表达式为 $y=2x-3$. 联立$\begin{cases}y=x^2-2x-3,\\y=2x-3,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}x=0,\\y=-3\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=4,\\y=5,\end{cases}$ $\therefore M(4,5)$.

5.【解】(1) 将 $A(-1,0)$，$B(4,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+2$ 得$\begin{cases}a-b+2=0,\\16a+4b+2=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}a=-\frac{1}{2},\\b=\frac{3}{2},\end{cases}$ $\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+2$.

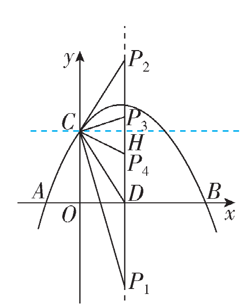
(2) 存在. 令 $x=0$，得 $y=2$，$\therefore C(0,2)$.

$\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=-\dfrac{\frac{3}{2}}{2\times\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{3}{2}$，$\therefore D\left(\frac{3}{2},0\right)$，

$\therefore CD=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+2^2}=\frac{5}{2}$.

如图所示，当 $CD=DP_1=\frac{5}{2}$ 时，

$y_{P_1}=-\frac{5}{2}$，



$\therefore P_1\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$. 当 $CD=CP_2$ 时，点 P_2 与点 D 关于直线 $y=2$ 对称，

$\therefore P_2\left(\frac{3}{2},4\right)$. 当 $CD=DP_3$ 时，$y_{P_3}=\frac{5}{2}$，$\therefore P_3\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$.

当 $CP_4=DP_4$ 时，作 $CH\perp$ 对称轴于 H.

设 $P_4D=x$，则 $CP_4=x$，$HP_4=2-x$. 由勾股定理得，$CH^2+HP_4^2=CP_4^2$，即 $\left(\frac{3}{2}\right)^2+(2-x)^2=x^2$，解得 $x=\frac{25}{16}$，

$\therefore P_4\left(\frac{3}{2},\frac{25}{16}\right)$. 综上，$P$ 点的坐标为 $\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2},4\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{3}{2},\frac{25}{16}\right)$.

6.【解】(1) $\because$ 抛物线的对称轴为直线 $x=3$，$AB=4$，$\therefore A(1,0)$，$B(5,0)$.

将 $A(1,0)$，$B(5,0)$ 代入 $y=ax^2+bx+5$，

得 $\begin{cases}a+b+5=0,\\25a+5b+5=0,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=1,\\b=-6,\end{cases}$

$\therefore$ 抛物线的表达式为 $y=x^2-6x+5$.

(2) 存在. 将 $A(1,0)$ 代入 $y=kx-1$，得 $k-1=0$，解得 $k=1$，$\therefore$ 直线 AD 的表达式为 $y=x-1$. $\because$ 当 $x=3$ 时，$y=x-1=2$，$\therefore D(3,2)$，$\therefore AD^2=(3-1)^2+2^2=8$.

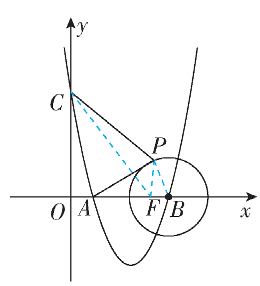
设 $M(x,y)$，则 $AM^2=(x-1)^2+y^2$，$DM^2=(x-3)^2+(y-2)^2$.

①当 $\angle DAM=90°$ 时，$AD^2+AM^2=DM^2$，即 $8+(x-1)^2+y^2=(x-3)^2+(y-2)^2$，化简得 $y=-x+1$.

联立 $\begin{cases}y=-x+1,\\y=x^2-6x+5,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x=1,\\y=0\end{cases}$（舍去）或 $\begin{cases}x=4,\\y=-3,\end{cases}$ $\therefore$ 点 M 的坐标为 $(4,-3)$；

②当 $\angle ADM=90°$ 时，$AD^2+DM^2=AM^2$，同理可求得点 M 的坐标为 $(0,5)$ 或 $(5,0)$. 综上，点 M 的坐标为 $(4,-3)$ 或 $(0,5)$ 或 $(5,0)$.

(3) 如图，在 AB 上取点 F，使 $BF=1$，连接 CF，PF，PB.



$\because PB=2$，$\therefore \frac{BF}{PB}=\frac{1}{2}$. $\because \frac{PB}{AB}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，

$\therefore \frac{BF}{PB}=\frac{PB}{AB}$. 又 $\because \angle PBF=\angle ABP$，

$\therefore \triangle PBF\backsim\triangle ABP$，$\therefore \frac{PF}{PA}=\frac{BF}{PB}=\frac{1}{2}$，即 $PF=\frac{1}{2}PA$，$\therefore PC+\frac{1}{2}PA=PC+PF\geqslant CF$，

$\therefore$ 当 C,P,F 三点共线时，$PC+\frac{1}{2}PA$ 的值最小，最小值为线段 CF 的长.

令 $x=0$，则 $y=5$，$\therefore C(0,5)$，$\therefore OC=5$. $\because OF=OB-BF=5-1=4$，

$\therefore CF=\sqrt{OC^2+OF^2}=\sqrt{5^2+4^2}=\sqrt{41}$，$\therefore PC+\frac{1}{2}PA$ 的最小值为 $\sqrt{41}$.

7.【解】(1) $\triangle ABC$ 为直角三角形. 理由：令 $x=0$，则 $y=2\sqrt{3}$，

$\therefore C(0,2\sqrt{3})$，$\therefore OC=2\sqrt{3}$. 令 $y=0$，则 $-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3}{2}x+2\sqrt{3}=0$，解得 $x_1=-\sqrt{3}$，$x_2=4\sqrt{3}$，

$\therefore A(-\sqrt{3},0)$，$B(4\sqrt{3},0)$，$\therefore AB=4\sqrt{3}-(-\sqrt{3})=5\sqrt{3}$，$OA=\sqrt{3}$，$OB=4\sqrt{3}$.

在 Rt$\triangle AOC$ 中，$AC^2=OA^2+OC^2=15$，

在 Rt$\triangle BOC$ 中，$BC^2=OB^2+OC^2=60$，

$\therefore AC^2+BC^2=75=AB^2$，$\therefore \angle ACB=90°$，

即 $\triangle ABC$ 为直角三角形.

(2) 设 AC 所在直线的函数表达式为 $y=k_1x+2\sqrt{3}$，

代入 $A(-\sqrt{3},0)$，得 $k_1=2$，

$\therefore AC$ 所在直线的函数表达式为 $y=2x+2\sqrt{3}$，

同理，可得 BC 所在直线的函数表达式为 $y=-\frac{1}{2}x+2\sqrt{3}$.

设 $P\left(m,-\frac{\sqrt{3}}{6}m^2+\frac{3}{2}m+2\sqrt{3}\right)$，

则 $F\left(m,-\frac{1}{2}m+2\sqrt{3}\right)$，$\therefore PF=-\frac{\sqrt{3}}{6}m^2+2m$.

$\because GF\perp PE$，$PE\perp x$ 轴，$\therefore GF/\!/x$ 轴，$\angle GFP=90°$. $\because AC/\!/PD$，

$\therefore \angle CAO=\angle PDE=\angle PGF$.

又 $\because \angle AOC=\angle GFP=90°$，$\therefore \triangle AOC\backsim\triangle GFP$，

$\therefore \frac{GF}{PF}=\frac{AO}{OC}=\frac{1}{2}$，$\therefore GF=\frac{1}{2}PF$.

$\because S=S_{\triangle CGF}+S_{\triangle OGF}=\frac{1}{2}GF\cdot OC$，

$\therefore S=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}PF\cdot 2\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}PF$，

$\therefore$ 当 PF 最大时，S 取得最大值.

$\because PF=-\frac{\sqrt{3}}{6}m^2+2m=-\frac{\sqrt{3}}{6}(m-2\sqrt{3})^2+2\sqrt{3}$，$0<m<4\sqrt{3}$，

$\therefore$ 当 $m=2\sqrt{3}$ 时，PF 取得最大值 $2\sqrt{3}$，$\therefore S$ 的最大值为 3，$P(2\sqrt{3},3\sqrt{3})$.

$\because PD/\!/AC$，

$\therefore$ 可设 PD 所在直线的函数表达式为 $y=2x+n$，

代入 $P(2\sqrt{3},3\sqrt{3})$，得 $n=-\sqrt{3}$，

$\therefore PD$ 所在直线的函数表达式为 $y=2x-\sqrt{3}$，

令 $y=0$，则 $2x-\sqrt{3}=0$，解得 $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$，

$\therefore D\left(\frac{\sqrt{3}}{2},0\right)$.

(3) 存在. $\because AO:OC:AC=1:2:\sqrt{5}$，

$\therefore$ 当抛物线沿射线 AC 方向平移 $\frac{3}{2}\sqrt{5}$ 个单位长度时，可以分

解为将抛物线水平向右平移$\frac{3}{2}$个单位长度,竖直向上平移3个单位长度.

∵ $y=-\frac{\sqrt{3}}{6}x^2+\frac{3}{2}x+2\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{25\sqrt{3}}{8}$,

∴ 平移后得到新的抛物线的表达式为 $y'=-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(x-\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{25\sqrt{3}}{8}+3=-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(x-\frac{3\sqrt{3}+3}{2}\right)^2+\frac{25\sqrt{3}+24}{8}$,

∴ 新的抛物线的对称轴为直线 $x=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$.

①当$\angle MCB=90°$,构成矩形 $MCBN$ 时,如图(1),过 M 作 $MQ\perp y$ 轴于 Q,

则$\angle MCQ+\angle OCB=90°$. ∵ $\angle OBC+\angle OCB=90°$,

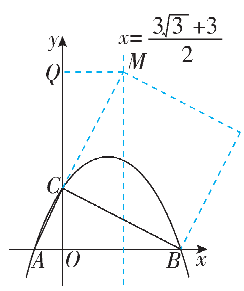
∴ $\angle MCQ=\angle OBC$,

∴ $\tan\angle MCQ=\tan\angle OBC=\frac{OC}{OB}=\frac{1}{2}$,

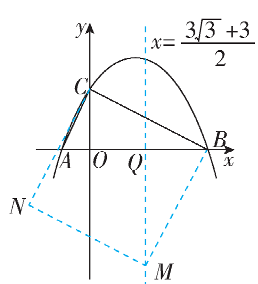
∴ $\frac{MQ}{CQ}=\frac{1}{2}$. ∵ $MQ=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$,

∴ $CQ=2MQ=3\sqrt{3}+3$,∴ $M\left(\frac{3\sqrt{3}+3}{2},5\sqrt{3}+3\right)$,

∴ 由坐标与平移关系可得 $N\left(\frac{11\sqrt{3}+3}{2},3\sqrt{3}+3\right)$.



图(1)



图(2)

②当$\angle CBM=90°$,构成矩形 $BCNM$ 时,如图(2),设直线 $x=\frac{3\sqrt{3}+3}{2}$交 x 轴于点 Q.

∵ $\angle CBO+\angle OBM=90°$,

$\angle BMQ+\angle OBM=90°$,∴ $\angle BMQ=\angle CBO$,

∴ $\tan\angle BMQ=\tan\angle CBO$,∴ $\frac{BQ}{MQ}=\frac{CO}{BO}=\frac{1}{2}$.

∵ $BQ=4\sqrt{3}-\frac{3\sqrt{3}+3}{2}=\frac{5\sqrt{3}-3}{2}$,

∴ $MQ=2BQ=5\sqrt{3}-3$,∴ $M\left(\frac{3\sqrt{3}+3}{2},3-5\sqrt{3}\right)$,

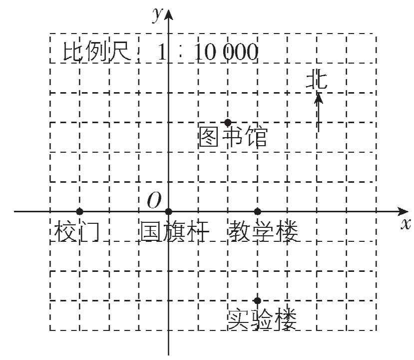
∴ 由坐标与平移关系可得 $N\left(\frac{3-5\sqrt{3}}{2},3-3\sqrt{3}\right)$.

综上所述,点 N 的坐标为 $\left(\frac{11\sqrt{3}+3}{2},3\sqrt{3}+3\right)$ 或 $\left(\frac{3-5\sqrt{3}}{2},3-3\sqrt{3}\right)$.

C 检测验收练

刷 速度

1. A 【解析】依题意,建立如图所示的平面直角坐标系,



则图书馆的位置坐标为(2,3). 故选 A.

2. A 【解析】∵ $y=-\frac{\pi}{x}$,$k=-\pi<0$,∴ 反比例函数图象分别位于第二、四象限,在每一个象限内 y 随 x 的增大而增大. ∵ $-2<-1<0<1$,∴ $x_3<0<x_1<x_2$,∴ $x_3<x_1<x_2$. 故选 A.

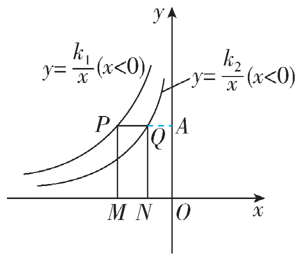
3. D 【解析】根据图象可知,小汽车共行驶了 $2\times120=240$(km),故选项 A 说法正确,不符合题意;小汽车中途停留 0. 5 h,故选项 B 说法正确,不符合题意;小汽车出发后前 3 h 的平均速度为 $120\div3=40$(km/h),故选项 C 说法正确,不符合题意;小汽车自出发后 3 h 至 5 h 之间行驶的速度不变,故选项 D 说法错误,符合题意. 故选 D.

4. A 【解析】当 $m+1>0$,即 $m>-1$ 时,y 随 x 的增大而增大,∴ 当 $x=3$ 时,$y=4$,即 $3(m+1)+m^2+1=4$,整理得 $m^2+3m=0$,解得 $m=0$ 或 $m=-3$(舍去). 当 $m+1<0$,即 $m<-1$ 时,y 随 x 的增大而减小,∴ 当 $x=1$ 时,$y=4$,即$(m+1)+m^2+1=4$,整理得 $m^2+m-2=0$,解得 $m=-2$ 或 $m=1$(舍去). 综上,$m=0$ 或 $m=-2$,故选 A.

5. D 【解析】∵ $y=ax^2+4ax-a^2+3=a(x+2)^2-4a-a^2+3$,∴ 二次函数 $y=ax^2+4ax-a^2+3$ 图象的对称轴为直线 $x=-2$. ∵ 当 $x<-3$ 时,y 随 x 的增大而减小,∴ $a>0$. ∵ 当$-1\leqslant x\leqslant1$ 时,y 的最小值是-1,∴ 当 $x=-1$ 时,$y=-1$,∴ $a-4a-a^2+3=-1$,解得 $a=1$ 或 $a=-4$(舍去),∴ a 的值为 1. 故选 D.

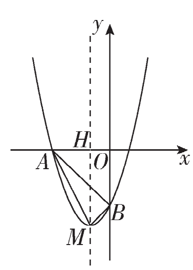
6. A 【解析】当 $x=0$ 时,$y=-2x+3=3$,则 $D(0,3)$;当 $y=0$ 时,$y=-2x+3=0$,解得 $x=\frac{3}{2}$,则 $B\left(\frac{3}{2},0\right)$,∴ $OD=3$,$OB=\frac{3}{2}$. ∵ 在菱形 $ABCD$ 中,$AB=BC=AD=CD$,$AB//CD$,∴ 点 C 的纵坐标为 3. 设 $AB=BC=AD=CD=m$,则 $OA=AB-OB=m-\frac{3}{2}$,点 C 的坐标为$(m,3)$. ∵ 在 Rt$\triangle AOD$ 中,$OA^2+OD^2=AD^2$,∴ $\left(m-\frac{3}{2}\right)^2+3^2=m^2$,解得 $m=\frac{15}{4}$,∴ 点 C 的坐标为$\left(\frac{15}{4},3\right)$,故选 A.

7. D 【解析】如图，延长 PQ 交 y 轴于点 A. ∵ 点 $P\left(-\frac{3}{2},2\right)$ 在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}(x<0)$ 的图象上，∴ $k_1=-\frac{3}{2}\times2=-3$.



∵ $PQ/\!/x$ 轴，$PM\perp x$ 轴于点 M，$QN\perp x$ 轴于点 N，∴ $\angle PMN=\angle MPQ=\angle MNQ=\angle QNO=\angle NOA=\angle OAQ=90°$，∴ 四边形 $PMNQ$，四边形 $NOAQ$，四边形 $PMOA$ 均是矩形. ∵ 点 P,Q 分别在反比例函数 $y=\frac{k_1}{x}(x<0)$ 与 $y=\frac{k_2}{x}(x<0)$ 的图象上，∴ $S_{矩形PMOA}=|k_1|=3$，$S_{矩形NOAQ}=|k_2|$. ∵ 矩形 $PMNQ$ 的面积为 2，∴ $S_{矩形PMNQ}=S_{矩形PMOA}-S_{矩形NOAQ}=2$，∴ $3-|k_2|=2$，解得 $k_2=\pm1$. ∵ $k_2<0$，∴ $k_2=-1$，故选 D.

8. C 【解析】①抛物线 $y=ax^2+2ax+c$ 的对称轴为直线 $x=-\frac{2a}{2a}=-1$. ∵ $A(-3,0)$，∴ 抛物线与 x 轴的另一个交点坐标为 $(1,0)$. ∵ 抛物线开口向上，∴ 当 $-3\leqslant x\leqslant1$ 时，$y\leqslant0$，故①符合题意. ②由图象得当 $x=-1$ 时，$y=a-2a+c<0$，∴ $-a+c<0$，故②符合题意. ③把 $A(-3,0)$ 代入 $y=ax^2+2ax+c$，得 $9a-6a+c=0$，∴ $c=-3a$，∴ $y=ax^2+2ax-3a=a(x+1)^2-4a$，∴ 抛物线的顶点为 $M(-1,-4a)$，∴ $ax^2+2ax+c\geqslant-4a$，故③符合题意. ④如图，设抛物线对称轴交 x 轴于 H，则 $H(-1,0)$，∴ $AH=-1-(-3)=2$，$MH=4a$，$OH=1$. 当 $x=0$ 时，$y=-3a$，∴ $B(0,-3a)$，∴ $OB=3a$，∴ $S_{\triangle ABM}=S_{\triangle AMH}+S_{梯形BMHO}-S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}AH\cdot MH+\frac{1}{2}(MH+OB)\cdot OH-\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}\times2\times4a+\frac{1}{2}\times(4a+3a)\times1-\frac{1}{2}\times3\times3a=3a$，故④不符合题意. 综上，正确的有①②③，故选 C.



9. $y=2(x+3)^2-1$ 【解析】把二次函数 $y=2x^2$ 的图象先向左平移 3 个单位长度，再向下平移 1 个单位长度，平移后所得图象对应的函数表达式是 $y=2(x+3)^2-1$. 故答案为 $y=2(x+3)^2-1$.

10. 35 【解析】根据题意得 $FL=F_1L_1=9.8\times25=245$，∴ 弹簧测力计的示数 F 关于 L 的函数表达式为 $F=\frac{245}{L}(0<L\leqslant50)$，∴ 当 $F=7$ N 时，$L=\frac{245}{7}=35$(cm). 故答案为 35.

11. 7 【解析】令 $y=\frac{12}{5}$，则 $\frac{12}{5}=-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x+1$，整理得 $x^2-8x+7=0$，解得 $x_1=7$，$x_2=1$(不合题意，舍去)，∴ 点 Q 到 y 轴的水平距离是 7 m，故答案为 7.

12. (1 014,0) 【解析】∵ $A_1(2,0)$，$A_2(1,-1)$，$A_3(0,0)$，$A_4(2,2)$，$A_5(4,0)$，$A_6(1,-3)$，$A_7(-2,0)$，$A_8(2,4)$，$A_9(6,0)$，…，∴ 观察可知，每 4 个点为一组，即点 $A_{4n+1}(2n+2,0)$，$A_{4n+2}(1,-2n-1)$，$A_{4n+3}(-2n,0)$，$A_{4n+4}(2,2n+2)$，其中 n 为自然数. ∵ $2\,025\div4=506\cdots\cdots1$，∴ 点 $A_{2\,025}$ 的纵坐标是 0，横坐标是 $2\times506+2=1\,014$，∴ 点 $A_{2\,025}$ 的坐标为 (1 014,0). 故答案为 (1 014,0).

13. 【解】(1) 设每张门票应涨价 x 元.

根据题意，得 $(10+x)(400-10x)=6\,000$，

解得 $x_1=10$，$x_2=20$. ∵ 要保证该项目每天盈利 6 000 元，同时又要使游客得到实惠，

∴ $x=10$. 答：每张门票应涨价 10 元.

(2) 设每张门票涨价 m 元，该项目每天盈利 W 元.

根据题意，得

$W=(10+m)(400-10m)=-10m^2+300m+4\,000$.

∵ $-10<0$，∴ $m=-\frac{300}{-10\times2}=15$ 时，该项目每天盈利最多.

答：每张门票涨价 15 元，才能使该项目每天盈利最多.

14. 【解】(1) ∵ 反比例函数 $y=\frac{k}{x}$ 的图象经过点 $Q(-6,-2)$，

∴ $k=-6\times(-2)=12$，

∴ 反比例函数的表达式为 $y=\frac{12}{x}$. ∵ 点 P 的纵坐标为 3，且点 P 也在反比例函数 $y=\frac{12}{x}$ 的图象上，∴ $3=\frac{12}{x}$，解得 $x=4$，

∴ 点 P 的坐标为 (4,3). ∵ 一次函数 $y=ax+b(a\neq0)$ 的图象经过点 $P(4,3)$，$Q(-6,-2)$，

∴ $\begin{cases}4a+b=3,\\-6a+b=-2,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2},\\b=1,\end{cases}$

∴ 一次函数的表达式为 $y=\frac{1}{2}x+1$.

(2) 观察图象，可知不等式 $ax+b<\frac{k}{x}$ 的解集为 $x<-6$ 或 $0<x<4$.

(3) 设 PQ 交 y 轴于点 C，令 $x=0$，则 $y=\frac{1}{2}x+1=1$，∴ 点 C 的坐标为 (0,1)，∴ $OC=1$，

∴ $S_{\triangle POQ}=S_{\triangle POC}+S_{\triangle QOC}=\frac{1}{2}OC(|x_P|+|x_Q|)=5$.

由题意得 $S_{\triangle MOP}=\frac{1}{2}OM\cdot|y_P|=3S_{\triangle POQ}=15$，即 $\frac{1}{2}OM\cdot3=15$，∴ $OM=10$，∴ 点 M 的坐标为 (10,0) 或 (−10,0).

15. 【解】(1) ∵ 抛物线 L：$y=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 与 x 轴交于 $A(-1,0)$，$B(3,0)$ 两点，与 y 轴交于点 $C(0,3)$，∴ 抛物线的表达式为 $y=a(x+1)(x-3)$. 把 $C(0,3)$ 代入，得 $3=-3a$，

∴ $a=-1$，∴ $y=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$.

(2)设 $E(m,-m^2+2m+3)$.

①设 BC 所在直线的表达式为 $y=sx+t$. 把 $B(3,0)$, $C(0,3)$ 代入,易得 BC 所在直线的表达式为 $y=-x+3$.

$\because E(m,-m^2+2m+3)$, $\therefore F(m,-m+3)$,

$\therefore EF=-m^2+2m+3+m-3=-m^2+3m=-\left(m-\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{9}{4}$.

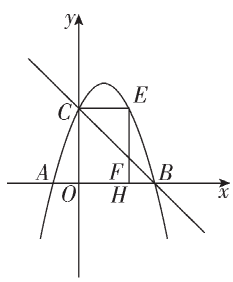
$\because -1<0$, $0<m<3$, $\therefore$ 当 $m=\dfrac{3}{2}$ 时, EF 取得最大值 $\dfrac{9}{4}$.

②$\because B(3,0)$, $C(0,3)$, $\therefore OB=OC=3$,

$\therefore \angle OBC=\angle OCB=45°$. $\because EH\perp x$ 轴, $\therefore \triangle BFH$ 为等腰直角三角形, $\therefore \angle CFE=\angle BFH=45°$,

$\therefore$ 当 $\triangle BFH$ 与 $\triangle CEF$ 相似时, $\triangle CEF$ 也为等腰直角三角形.

当 $\angle CEF=90°$ 时, $CE\perp EF$, 如图(1),



图(1)

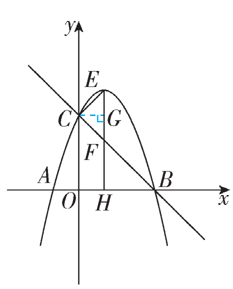
$\therefore CE/\!/x$ 轴, $\therefore C,E$ 关于抛物线 L 的对称轴对称.

$\because y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$, $\therefore$ 对称轴为直线 $x=1$.

$\because C(0,3)$, $\therefore E(2,3)$.

当 $\angle ECF=90°$ 时,过点 C 作 $CG\perp EF$ 于 G,如图(2),

则 $EG=FG=CG=\dfrac{1}{2}EF=m$.



图(2)

由①知 $EF=-m^2+3m$, $\therefore -m^2+3m=2m$,

解得 $m=1$ 或 $m=0$(舍去), $\therefore E(1,4)$.

综上, $E(2,3)$ 或 $E(1,4)$.

③是定值.

当点 E 运动到抛物线 L 的顶点位置时, $E(1,4)$,

$\therefore F(1,2)$, $H(1,0)$, $D(1,3)$.

设过点 $D(1,3)$ 的直线的表达式为 $y=k(x-1)+3$.

联立 $\begin{cases} y=k(x-1)+3, \\ y=-x^2+2x+3, \end{cases}$

解得 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k}{2}+1, \\ y=-\dfrac{k\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k^2}{2}+3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=\dfrac{\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k}{2}+1, \\ y=\dfrac{k\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k^2}{2}+3, \end{cases}$

$\therefore$ 不妨设 $P\left(-\dfrac{\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k}{2}+1,-\dfrac{k\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k^2}{2}+3\right)$,

$Q\left(\dfrac{\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k}{2}+1,\dfrac{k\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k^2}{2}+3\right)$.

设过点 E 的直线的表达式为 $y=n(x-1)+4$,

则当 $y=0$ 时, $x=1-\dfrac{4}{n}$.

把 $P\left(-\dfrac{\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k}{2}+1,-\dfrac{k\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k^2}{2}+3\right)$ 代入 $y=n(x-1)+4$, 得 $-\dfrac{k\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k^2}{2}+3=n\left(-\dfrac{\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k}{2}\right)+4$,

解得 $n=\dfrac{\sqrt{k^2+4}+k}{2}$, $\therefore x_M=1-\dfrac{8}{\sqrt{k^2+4}+k}=1-2(\sqrt{k^2+4}-k)$.

同理,把 $Q\left(\dfrac{\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k}{2}+1,\dfrac{k\sqrt{k^2+4}}{2}-\dfrac{k^2}{2}+3\right)$ 代入 $y=n(x-1)+4$, 解得 $n=\dfrac{-\sqrt{k^2+4}+k}{2}$, $\therefore x_N=1+\dfrac{8}{\sqrt{k^2+4}-k}=1+2(\sqrt{k^2+4}+k)$.

由题意可知点 M,N 分别在点 H 的两边,

不妨设点 M 在点 H 的左边,点 N 在点 H 的右边,则 $HM=1-1+2(\sqrt{k^2+4}-k)=2(\sqrt{k^2+4}-k)$, $HN=1+2(\sqrt{k^2+4}+k)-1=2(\sqrt{k^2+4}+k)$,

$\therefore HM\times HN=2(\sqrt{k^2+4}-k)\cdot 2(\sqrt{k^2+4}+k)=16$,

$\therefore HM\times HN$ 是定值,为 16.

数与代数综合训练

刷综合

1. B 【解析】根据题意可知,点 P 表示的数在 -4 和 -1 之间, $\therefore$ 点 P 表示的数可能是 -3,故选 B.

2. D 【解析】$m=4\times10^{17}\times5=2\times10^{18}$,故选 D.

3. C 【解析】A 选项,计算结果是 $2a^3$,故该选项不符合题意;B 选项,计算结果是 $-a^6$,故该选项不符合题意;C 选项, $a^2\cdot a^4=a^6$,故该选项符合题意;D 选项,计算结果是 a^7,故该选项不符合题意. 故选 C.

第一部分 考点过关
第二部分 题型突破
第三部分 中考新趋势
狂K重点

4. B 【解析】

选项	分析	正误
A	由题图可知,第 5 天的种群数量超过 300 个	×
B	由题图可知,前 3 天种群数量持续增长	√
C	由题图可知,第 3 天的种群数量不是最大的	×
D	由题图可知,种群数量的增长速度先增大后减小,∴ 每天增加的种群数量不同	×

5. A 【解析】一次函数 $y=3x+a$(a 为常数)的图象与 y 轴的交点坐标为$(0,a)$,即 $A(0,a)$. 将一次函数 $y=3x+a$ 的图象向右平移 6 个单位长度后所对应的函数表达式为 $y=3(x-6)+a$,即 $y=3x-18+a$,∴ 一次函数 $y=3x-18+a$ 的图象与 y 轴的交点坐标为$(0,-18+a)$,即 $B(0,-18+a)$. ∵ 点 A 与点 B 关于 x 轴对称,∴ $a=18-a$,∴ $a=9$,故选 A.

6. B 【解析】解关于 x 的方程 $x^2+x-6=0$,得 $x_1=2$,$x_2=-3$. 当 $x=2$ 时,$\frac{5}{2+3}=\frac{1}{2\times2+a}$,解得 $a=-3$,经检验,$a=-3$ 是分式方程的解;当 $x=-3$ 时,分式方程无意义. 综上,a 的值为-3. 故选 B.

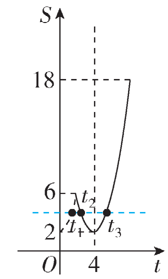
7. A 【解析】由图象可得,$b_1=2$,$b_2=-1$,$k_1>0$,$k_2>0$,∴ $b_1+b_2>0$,故选项 A 正确,符合题意;$b_1b_2<0$,故选项 B 错误,不符合题意;$k_1+k_2>0$,故选项 C 错误,不符合题意;$k_1k_2>0$,故选项 D 错误,不符合题意. 故选 A.

方法技巧

一次函数的图象与系数的关系

①$k>0,b>0\Leftrightarrow y=kx+b$ 的图象经过第一、二、三象限;
②$k>0,b<0\Leftrightarrow y=kx+b$ 的图象经过第一、三、四象限;
③$k<0,b>0\Leftrightarrow y=kx+b$ 的图象经过第一、二、四象限;
④$k<0,b<0\Leftrightarrow y=kx+b$ 的图象经过第二、三、四象限.

8. B 【解析】点 P 在 BC 上时,在 Rt△PCD 中,$CD=\sqrt{2}$,$PC=t$,∴ $S=PD^2=t^2+2$. 当 $S=6$,即 $t^2+2=6$ 时,解得 $t=2$(负值已舍去),∴ $BC=2$,∴ 点 P 在 BC 上时,$0\leqslant t<2$,∴ 当 $t=1$ 时,$S=t^2+2=3$,故①正确. 由图象可知抛物线顶点坐标为$(4,2)$,且过点$(2,6)$,则点 P 在线段 BA 上时,设抛物线的表达式为 $S=a(t-4)^2+2$,将$(2,6)$代入上式得 $6=a(2-4)^2+2$,解得 $a=1$,∴ 点 P 在线段 BA 上时,抛物线的表达式为 $S=(t-4)^2+2=t^2-8t+18$,故②错误. 当 $S=18$ 时,$t^2-8t+18=18$,解得 $t=0$(舍去)或 $t=8$,则 $AB=8-2=6$,∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{6^2-2^2}=4\sqrt{2}$,∴ $AD=4\sqrt{2}-\sqrt{2}=3\sqrt{2}$,故③错误. 画出 $S=t^2+2(0\leqslant t<2)$的图象如图. ∵ 抛物线 $S=t^2+2(0\leqslant t<2)$和 $S=t^2-8t+18(2\leqslant t\leqslant8)$的开口方向和大小相同,且存在 3 个时刻 $t_1,t_2,t_3(t_1<t_2<t_3)$对应的正方形 $DPEF$ 的面积均相等,∴ t_1,t_2 关于直线 $t=2$ 对称,∴ $\frac{1}{2}(t_1+t_2)=2$,即 $t_1+t_2=4$,故④正确. 故选 B.

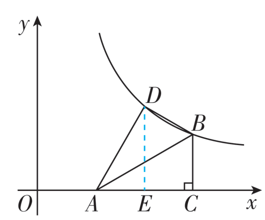


9. $xy(x+2)$　【解析】$x^2y+2xy=xy(x+2)$,故答案为 $xy(x+2)$.

10. 4 或 $\frac{1}{4}$　【解析】∵ $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$,$3\sqrt{3}=2\sqrt{3}+\sqrt{3}=\sqrt{12}+\sqrt{3}$,∴ $a=3$,$b=12$ 或 $a=12$,$b=3$,∴ $\frac{b}{a}=\frac{1}{4}$或$\frac{b}{a}=4$. 故答案为 4 或$\frac{1}{4}$.

11. 257 048　【解析】设两个连续的正奇数分别是 $2n+1$,$2n-1$(n 为正整数),则$(2n+1)^2-(2n-1)^2=4n^2+4n+1-4n^2+4n-1=8n$. 由题意得 $8n\leqslant2\ 024$,所以 $n\leqslant253$. 因为 n 是正整数,且当 $n=253$ 时,$2n+1=2\times253+1=507$,$2n-1=2\times253-1=505$,所以不超过 2 024 的所有"登高数"的和是 $3^2-1^2+5^2-3^2+7^2-5^2+\cdots+505^2-503^2+507^2-505^2=507^2-1^2=$ 257 048. 故答案为 257 048.

12. $2\sqrt{3}$　【解析】如图,过点 D 作 $DE\perp x$ 轴于点 E,则$\angle DEA=90°$. ∵ 点 A 的坐标为$(1,0)$,∴ $OA=1$. 设 $BC=m$. ∵ $BC\perp x$ 轴于点 C,$\angle BAC=30°$,∴ $AB=2m$,∴ $AC=\sqrt{AB^2-BC^2}=\sqrt{(2m)^2-m^2}=\sqrt{3}m$,∴ $OC=OA+AC=\sqrt{3}m+1$,∴ 点 B 的坐标为$(\sqrt{3}m+1,m)$. 由翻折得 $AD=AC=\sqrt{3}m$,$\angle BAD=\angle BAC=30°$,∴ $\angle EAD=60°$. 在 Rt△AED 中,$AE=\frac{1}{2}AD=\frac{\sqrt{3}m}{2}$,$DE=\frac{\sqrt{3}}{2}AD=\frac{3m}{2}$,∴ $OE=OA+AE=\frac{\sqrt{3}m}{2}+1$,∴ 点 D 的坐标为$\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}+1,\frac{3}{2}m\right)$. ∵ 点 B,D 在反比例函数 $y=\frac{k}{x}(x>0)$的图象上,∴ $k=\left(\frac{\sqrt{3}m}{2}+1\right)\cdot\frac{3}{2}m=(\sqrt{3}m+1)m$,∴ $m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$($m=0$ 已舍去),∴ $k=\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\times\sqrt{3}+1\right)\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=2\sqrt{3}$,故答案为 $2\sqrt{3}$.



13.【解】(1)原式$=\frac{1}{2}\times6-9+(-4)$
$=3-9-4$
$=-10$.

(2)$\begin{cases}3x-2y=11,①\\x+2y=1,②\end{cases}$

①+②得 $4x=12$,解得 $x=3$,

把 $x=3$ 代入②得 $y=-1$，

∴ 方程组的解为 $\begin{cases}x=3,\\ y=-1.\end{cases}$

14.【解】$\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a+2}{a^2-1}\div\dfrac{a^2+3a+2}{a^2-2a+1}=\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a+2}{(a+1)(a-1)}\cdot\dfrac{(a-1)^2}{(a+1)(a+2)}=\dfrac{1}{a+1}-\dfrac{a-1}{(a+1)^2}=\dfrac{a+1-a+1}{(a+1)^2}=\dfrac{2}{(a+1)^2}$.

∵ a 满足 $a^2+2a-15=0$，∴ $a^2+2a=15$.

∴ 原式 $=\dfrac{2}{a^2+2a+1}=\dfrac{2}{15+1}=\dfrac{1}{8}$.

15.【解】(1) 令 $y=0$，则 $-2x+6=0$，∴ $x=3$；

令 $x=0$，则 $y=6$，∴ $A(3,0)$，$B(0,6)$.

把 $A(3,0)$，$B(0,6)$ 代入 $y=-x^2+bx+c$，

得 $\begin{cases}-9+3b+c=0,\\ c=6,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}b=1,\\ c=6,\end{cases}$

∴ 抛物线所对应的函数表达式为 $y=-x^2+x+6$.

(2) 存在点 D，使得 $\triangle BDE$ 和 $\triangle ACE$ 相似.

设点 $D(t,-t^2+t+6)$，则 $E(t,-2t+6)$，$C(t,0)$，

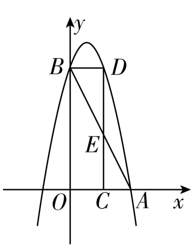
∴ $EC=-2t+6$，$AC=3-t$，$DE=-t^2+3t$.

∵ $\triangle BDE$ 和 $\triangle ACE$ 相似，$\angle BED=\angle AEC$，∴ $\triangle ACE\backsim\triangle BDE$ 或 $\triangle ACE\backsim\triangle DBE$.

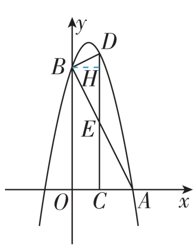
①如图(1)，当 $\triangle ACE\backsim\triangle BDE$ 时，$\angle BDE=\angle ACE=90°$，

∴ $BD/\!/AC$，∴ D 点纵坐标为 6，∴ $-t^2+t+6=6$，

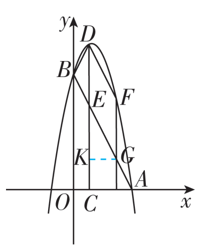
解得 $t=0$(舍去) 或 $t=1$，∴ $D(1,6)$.



图(1)



图(2)



图(3)

②如图(2)，当 $\triangle ACE\backsim\triangle DBE$ 时，$\angle BDE=\angle CAE$. 过 B 作 $BH\perp DC$ 于 H，∴ $\angle BHD=90°$，$BH=t$，$DH=-t^2+t$，

∴ $\tan\angle BDE=\dfrac{BH}{DH}=\tan\angle CAE=\dfrac{OB}{OA}$，∴ $\dfrac{t}{-t^2+t}=\dfrac{6}{3}=2$，

∴ $-2t^2+2t=t$，解得 $t=0$(舍去) 或 $t=\dfrac{1}{2}$，∴ $D\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{25}{4}\right)$.

综上所述，点 D 的坐标为 $(1,6)$ 或 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{25}{4}\right)$.

(3) 如图(3)，∵ 四边形 $EGFD$ 为菱形，

∴ $DE/\!/FG$，$DE=FG$，$ED=EG$.

设点 $D(m,-m^2+m+6)$，$F(n,-n^2+n+6)$，则 $E(m,-2m+6)$，$G(n,-2n+6)$，

∴ $DE=-m^2+3m$，$FG=-n^2+3n$，∴ $-m^2+3m=-n^2+3n$，即 $(m-n)(m+n-3)=0$.

∵ $m-n\neq0$，∴ $m+n-3=0$，即 $m+n=3$.

∵ $A(3,0)$，$B(0,6)$，∴ $AO=3$，$BO=6$，

∴ $AB=\sqrt{AO^2+BO^2}=3\sqrt{5}$.

过点 G 作 $GK\perp DC$ 于 K，∴ $KG/\!/AC$，∴ $\angle EGK=\angle BAC$，

∴ $\cos\angle EGK=\dfrac{KG}{EG}=\cos\angle BAC=\dfrac{OA}{AB}$，即 $\dfrac{|n-m|}{EG}=\dfrac{3}{3\sqrt{5}}$，

∴ $EG=\sqrt{5}\,|n-m|=\sqrt{5}\,|3-2m|$.

∵ $DE=EG$，∴ $-m^2+3m=\sqrt{5}\,|3-2m|$，

∴ $m^2-(3+2\sqrt{5})m+3\sqrt{5}=0$ 或 $m^2-(3-2\sqrt{5})m-3\sqrt{5}=0$，解得 $m=\dfrac{3+2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$(不合题意，舍去) 或 $m=\dfrac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$ 或 $m=\dfrac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$ 或 $m=\dfrac{3-2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$(不合题意，舍去)，

∴ $m=\dfrac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$ 或 $m=\dfrac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$，∴ 点 D 的横坐标为 $\dfrac{3+2\sqrt{5}-\sqrt{29}}{2}$ 或 $\dfrac{3-2\sqrt{5}+\sqrt{29}}{2}$.

第四章　三角形

A 湖南真题诊断练

刷 诊断

1. A　【解析】A 选项，两点之间，线段最短，原命题正确，符合题意；B 选项，菱形的对角线互相垂直，不一定相等，原命题错误，不符合题意；C 选项，正五边形的外角和为 360°，原命题错误，不符合题意；D 选项，直角三角形不一定是轴对称图形，只有等腰直角三角形才是轴对称图形，原命题错误，不符合题意. 故选 A.

2. B　【解析】∵ $AB/\!/CD$，∴ $\angle AEG=\angle2=50°$. ∵ $\angle1=70°$，∴ $\angle GEF=180°-\angle1-\angle AEG=180°-70°-50°=60°$. 故选 B.

3. D　【解析】A 选项，∵ $1+2=3$，∴ 长度为 1 cm，2 cm，3 cm 的三条线段不能组成三角形，本选项不符合题意；B 选项，∵ $3+5=8$，∴ 长度为 3 cm，8 cm，5 cm 的三条线段不能组成三角形，本选项不符合题意；C 选项，∵ $4+5<10$，∴ 长度为 4 cm，5 cm，10 cm 的三条线段不能组成三角形，本选项不符合题意；D 选项，∵ $4+5>6$，∴ 长度为 4 cm，5 cm，6 cm 的三条线段能组成三角形，本选项符合题意. 故选 D.

4. D　【解析】∵ 点 D，E 分别为边 AB，AC 的中点，∴ DE 是 $\triangle ABC$ 的中位线，∴ $DE/\!/BC$，$BC=2DE$，故选项 A、C 正确. ∵ $DE/\!/BC$，∴ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，故选项 B 正确. ∵ $\triangle ADE\backsim\triangle ABC$，∴ $\dfrac{S_{\triangle ADE}}{S_{\triangle ABC}}=\left(\dfrac{DE}{BC}\right)^2=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，∴ $S_{\triangle ADE}=\dfrac{1}{4}S_{\triangle ABC}$，故选项 D 错误. 故选 D.